SOBRE EL BUEN PLANTEAMIENTO Y PROPAGACIÓN DE REGULARIDAD PARA LA ECUACIÓN ZAKHAROV-KUZNETSOV.

Stiven Leonardo Silva Castillo.
Estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas.

Universidad Nacional de Colombia.
Facultad de Ciencias.
Departamento de Matemáticas.
Bogotá, D.C.
2016.

SOBRE EL BUEN PLANTEAMIENTO Y PROPAGACIÓN DE REGULARIDAD PARA LA ECUACIÓN ZAKHAROV-KUZNETSOV.

Stiven Leonardo Silva Castillo.
Estudiante de la Maestría en Ciencias Matemáticas.

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Ciencias Matemáticas.

Director
Germán Eduardo Fonseca Buitrago Ph.D.

Universidad Nacional de Colombia.
Facultad de Ciencias.
Departamento de Matemáticas.
Bogotá, D.C.
2016.

Título en español

Sobre el buen planteamiento y propagación de regularidad para la ecuación Zakharov-Kuznetsov.

Title in English

On the well posedeness and propagation of regularity for the Zakharov-Kuznetsov equation.

Resumen: Abordamos el problema de propagación de regularidad y decaida en la variable x, asociado al problema de valor inicial (PVI) para la ecuación k-generalizada Zakharov-Kuznetsov bidimensional:

$$(k\text{-gZK}) \begin{cases} \partial_t u + u^k u_x + \partial_x(\Delta u) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}^+ \ , \ x, y \in \mathbb{R} \ , \quad t \geq 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \in H^{1^+}(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Además, se discuten algunas propiedades importantes para este fin, invocando el buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > s_k$, donde s_k es el indice de regularidad en los datos iniciales, que garantizan buen planteamiento al (PVI) de la ecuación (k-gZK), junto con estimaciones de las soluciones que son requeridas.

Abstract: We address the problem of propagation for regularity and decay in the variable x associated with the initial value problem (IVP) of the k -generalized Zakharov-Kuznetsov two-dimensional equation:

$$(k\text{-gZK}) \begin{cases} \partial_t u + u^k u_x + \partial_x(\Delta u) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}^+ \ , \ x, y \in \mathbb{R} \ , \quad t \geq 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \in H^{1^+}(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

In addition, for this purpose some important properties are discussed, invoking the well posedness in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$ with $s > s_k$ where s_k is the regularity index of the initial data in order to ensure well posedness for the (k-gZK) (IVP), along with estimates of the solutions that are required.

Palabras clave: Buen planteamiento local y global, ecuación Zakharov-Kuznetsov, propagación de regularidad, velocidad infinita de propagación, decaida de las soluciones en el infinito.

Keywords: Local and global well posedness, Zakharov-Kuznetsov equation, propagation of regularity, infinite speed of propagation, decay of solutions at infinity.

Nota de aceptación.

Trabajo de grado:
Aprobado.

"Mención Meritoria."

Jurado
Guillermo Rodriguez Blanco.

Bogota, D.C., Marzo 03 del 2017.

Agradecimientos

Agradezco a cada miembro de mi familia por su incondicional apoyo, principalmente a mi madre Luz Haydeé, porque sus manos han dado paso para cumplir con muchos objetivos propuestos, entre ellos este trabajo.

Doy gracias al Profesor Germán Fonseca, por las innumerables discusiones que hicieron posible concretar la idea de este proyecto.

A Martha Mancera y familia por su dulce y bondadosa compañia durante este transcurso de vida.

También, agradezco a todos mis profesores y amigos, con los que pude compartir sentidos momentos, en especial a Tatiana Yara y a Jesús Suarez.

Gracias a la Universidad Nacional de Colombia, porque sus multiples programas de bienestar de los cuales gocé, fueron decisivos para lograr con éxito, cada proceso académico que me era requerido.

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción.

En este trabajo se aborda el problema de propagación de regularidad y decaida en la variable x, asociado al problema de valor inicial (PVI) para la ecuación k-generalizada Zakharov-Kuznetsov bidimensional:

$$(k\text{-gZK}) \begin{cases} \partial_t u + u^k u_x + \partial_x(\Delta u) = 0 & k \in \mathbb{Z}^+ \ , \ x, y \in \mathbb{R} \ , \quad 0 \leq t \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \in H^{1^+}(\mathbb{R}^2). \end{cases} \tag{1.1}$$

Donde $H^{1^+}(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Sobolev de tipo L^2 en $\mathbb{R}^2$, es decir el conjunto de funciones en el espacio de Lebesgue L^2, cuyas derivadas distribucionales u homogéneas de orden 1^+ se encuentran también en L^2.

Además, se discuten algunas propiedades importantes para este fin, invocando el buen planteamiento en los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > s_k$, donde s_k es el indice de regularidad para los datos iniciales que garantizan buen planteamiento al (PVI) de la ecuación (k-gZK), junto con estimaciones de las soluciones que son requeridas, las cuales han sido ampliamente estudiadas, ver [18] y [17].

La ecuación (1.1) es una de tantas generalizaciones en varias variables espaciales de la famosa ecuación k-generalizada Korteweg-de Vries (k-gKdV):

$$\partial_t u + u^k \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0 \quad x \in \mathbb{R} \ , \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

La ecuación (1-gKdV) o más brevemente (KdV), se emplea en el modelamiento de la propagacion de ondas largas unidireccionales de agua en un canal poco profundo [15]. También, se ha considerado en un contexto diferente; a saber, en su relación con la dispersión inversa para su solución, en la física de plasmas y hasta en la geometría algebráica [23], [22]. Por otro lado, la ecuación (2-gKdV) conocida como la ecuacion modificada Kortewed-de Vries y por ello la abreviación (mKdV), la cual modela ondas dispersivas no lineales débiles, como también guarda una estrecha relación a través de la dispersión inversa de forma análoga a la ecuación (KdV). Es de resaltar que tanto la ecuación (KdV) y la ecuación (mKdV) tienen más caracteristicas en común, como por ejemplo su interconección con la transformada de Miura o que satisfacen infinitas leyes de conservación, las cuales son

usadas para obtener soluciones globales, ver [24].
Ahora, para mencionar algunas de las utilidades de la ecuación en estudio (1.1), es sabido que para la ecuación (1-gZK) o más conocida como ecuación (ZK) fue formalmente deducida por Zakharov y Kuznetsov [31], como un modelo asintótico que describe la propagación de ondas no-lineales ion-acusticas en plasma magnetizado [16]. Por otra parte Kakutani y Ono, observaron que la ecuación (2-gZK) o abreviadamente la ecuación (mZK) describe otro tipo de propagación en ondas de tipo Alfvén con un ángulo crítico en un campo magnetico sin perturbación, ver [11].

En general, cuando se consigue un modelo de tipo dispersivo no lineal como el que esta referenciado en este estudio (1.1), se desea obtener condiciones de regularidad en los datos iniciales que garanticen buen planteamiento del problema de valor incial o también al problema de Cauchy asociado a dicho modelo.

En este contexto Faminskii en [1], adaptó el método de Kenig, Ponce y Vega [13], para encontrar efectos regularizantes y demostrar que el (PVI) asociado a la ecuacion (ZK) es globalmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^2)$, con s un valor entero y $s > 1$. Despúes, F. Linares y A. Pastor, mejoran las estimaciones lineales encontradas por Faminskii, y con el principio de contracción obtienen que el (PVI) asociado a las ecuaciones (ZK) y (mZK) son localmente bien planteados en $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 3/4$ y para el resto de la familia $s > s_k$ con s_k que describiremos más adelante, ver [2], [18] y [17].

Posteriormente, A. Grünrock y S. Herr, emplean una simetrización de la ecuación (ZK) y espacios de Bourgain para obtener el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 1/2$, ver [4]. Luego, F. Ribaud y S. Vento, aplican un método iterativo para probar que el (PVI) es localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 1/4$ si $k = 2$, $s > 5/12$ si $k = 3$ y $s > 1-2/k$, si $k \geq 4$. Además, prueban el buen planteamiento en ciertos espacios de Besov, ver [30].

A diferencia del vastisimo estudio que se ha desarrollado en estas últimas 4 decadas para el buen planteamiento de ecuaciones, es muy reciente el problema de la propagación de regularidad para ecuaciones de tipo dispersivo, apesar de que una de las ideas fundamentales data cuando T. Kato [9] demuestra la existencia de soluciones débiles globales para la ecuación (KdV) correspondiente a un dato inicial en $L^2(\mathbb{R})$, la cual en sus cálculos logró la estimación de $\|u\|_{L^2_T H^1(-R,R)}$ en términos de $\|u_0\|_0$, o para mayor generalidad prueba en base a que habia comprobado el buen planteamiento del (PVI) asociado a la (KdV) en $H^{\frac{3}{2}^+}(\mathbb{R})$, el siguiente *efecto regularizante local* o más conocido en honor a su trabajo como *efecto regularizante local de Kato*:

Teorema 1.1. [9] *Sean $s > 3/2$ y $0 < T < \infty$. Si $u \in C([0,T]; H^s)$ es la solución al (PVI) (1.2) cuyo dato incial es $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, entonces*

$$u \in L^2([0,T]; H^{s+1}(-R,R)) \quad \textit{para cualquier} \quad 0 < R < \infty,$$

con la norma asociada que depende únicamente en función de $\|u_0\|_{s,2}$, R y T.

Someramente, la prueba se basa en observar para el (PVI) asociado a la ecuación (KdV) la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}(J^s u)^2\rho(x)\,dx + 3\int_{\mathbb{R}}(J^s\partial_x u)^2\rho'(x)\,dx = \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}}(J^s u)^2\rho'''(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}}(J^s u)^2\partial_x(u\rho)\,dx - 2\int_{\mathbb{R}}\rho(x)(J^s u)[J^s; M_u]\partial_x u\,dx, \end{aligned} \tag{1.3}$$

para $s \in \mathbb{R}$, como en el Teorema (1.1) , $[\,\cdot\,;\,\cdot\,]$ es el operador conmutador y M_u el operador multiplicación por la función u. Al seleccionar una función $\rho = \rho(x)$ suficientemente suave, no negativa, no decreciente, cuya derivada ρ' tenga soporte compacto, despúes de aplicar integración en la variable temporal t de $[0, T]$ en la anterior identidad, lo que logra es una estimativa local de $J^s\partial_x u$ en el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$, ya que el lado derecho de (1.3) es controlado por $\|u_0\|_{s,2}$, la cantidad, $\mu(\text{supp}(\rho'))$ donde μ es la medida de Lebesgue y T el tiempo de existencia.

Recientemente P. Isaza, F. Linares y G. Ponce, llevaron esta técnica para estudiar el tipo de propagación de regularidad para la familia (k-gKdV) en [6] , de igual manera lo abordaron para la ecuación Benjamin-Ono [7] y para la ecuación Kadomtsev-Petviashvilli (KPII) [8]. Incluso estudiaron la persistencia de la decaida de las soluciones para la familia (k-gKdV), y observaron una interesante relación en espacios asimétricos, el cual afirma que con $s > 3/4$, si $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ y además $\|x^{n/2}u_0\|_{L^2((0,\infty))} < \infty$ entonces en particular para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, $u(\cdot, t) \in H^n((x_0, \infty))$ sólamente en tiempos estrictamente positivos.

Otros trabajos que abordan el tipo de propagación de regularidad a fenómenos dispersivos han sido investigados con diversas conclusiones, ver [12], [20], [21] y [27].

Este trabajo se encuentra dividido de la siguiente manera: En el siguiente capítulo se presentan definiciones, resultados teóricos necesarios. Despúes, en el tercer capítulo se desarrolla el buen planteamiento para el (PVI) de la ecuación (ZK), el cual se sigue de las ideas que en [17] se desarrollan para la ecuación (mZK), además se mencionan algunas estimativas *a priori* para la familia en general (k-gZK) que son requeridas en los posteriores capítulos. En el cuarto capítulo, se enuncia y se demuestra con absoluto detalle la propagación de regularidad en el semiplano derecho para la ecuación (k-gZK). Y en el último capítulo se verifica que en efecto el (PVI) de la ecuación (k-gZK) preserva decaida a derecha en la variable x.

Se resalta que para el tercer capítulo nos basamos en las ideas presentes en [17] y para los capítulos cuatro y cinco el método de prueba es una una adaptación del empleado en los trabajos [6, 8].

NOTACIÓN.

- $\mathbb{R}^2$ es el plano cartesiano, con producto interno $(\,\cdot\,)$, norma euclidea $|\cdot|$ con variable espacial (x, y) y variable de frecuencia (ξ, η).
- Ω es un conjunto abierto del plano $\mathbb{R}^2$.
- $D(a, r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\;|\;\; |(x, y) - a| < r\}$ es el disco abierto centrado en $a \in \mathbb{R}^2$ y radio r.

- $*$ denota la relación convolución.
- $\widehat{\cdot}$ denota la transformada de Fourier.
- $\{\cdot\}^{\vee}$ denota la transformada de Fourier inversa.
- $C^k(\Omega)$ es el conjunto de funciones con dominio Ω a valor complejo, k-veces diferenciable con k-ésima derivada continua. Se considera la notación $C^k_\infty(\Omega)$ el conjunto de funciones en $C^k(\Omega)$ que se anulan en $\partial\Omega$.
  Y se escribe $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$.
- $C_0(\Omega)$, $C^k_0(\Omega)$, etc denota estas funciones $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, etc con soporte compacto.
- Notación multi-indice: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}$, con norma $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, y para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se define $(x, y)^\alpha := x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$ y $\partial^\alpha := \partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}$.
- $(\cdot, \cdot)_X$, denota el producto interno en el espacio de Hilbert X.
- $\langle \cdot, \cdot\rangle_X$ denota la dualidad de $X' \times X$, es decir $\langle f, x\rangle_X := f(x)$, para cada $f \in X'$ y $x \in X$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Schwartz esto es el espacio de funciones $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tales que
  $$\sup_{z\in\mathbb{R}^2} \left| z^\alpha(\partial^\beta f)(z)\right| < \infty,$$
  para cualesquiera multi-indices α y β. Consecuentemente, denotamos su dual topológico como $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, el cual se denomina espacio de las distribuciones temperadas.
- $[A; B] = AB - BA$ identifica el conmutador de A y B, donde A y B son operadores definidos en un espacio vectorial no trivial.
- Para X y Y espacios de Banach, $Y \hookrightarrow X$ significa que el espacio Y está continua y densamente inmerso en X .
- Dado el espacio medible (S, Σ, μ), se denota $L^p(S)$ o $L^p(d\mu)$ al espacio de todas las funciones medibles $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\int_S |f|^p \, d\mu < \infty$ con $0 \leq p < \infty$ o $\operatorname{ess\,sup}_S|f| < \infty$ si $p = \infty$, y dependiendo del valor p, el espacio $L^p(d\mu)$ su norma se denota $\|\cdot\|_{L^p}$.
- $J^s = (1 - \Delta)^{s/2}$ y $D^s = (-\Delta)^{s/2}$ denotan respectivamente el potencial de Bessel y Riesz de orden $-s$ respectivamente. Para $\beta \in \mathbb{C}$, la derivada homogénea D_x^β, D_y^β para funciones en $\mathbb{R}^2$ están definidas vía la transformada de Fourier por $\widehat{D_x^\beta f}(\xi, \eta) = |\xi|^\beta \widehat{f}(\xi, \eta)$ y $\widehat{D_y^\beta f}(\xi, \eta) = |\eta|^\beta \widehat{f}(\xi, \eta)$ respectivamente.
- $W^{m,p}(\Omega; d\mu)$ es el espacio de Sobolev de orden m para $1 \leq p \leq \infty$ y medida asociada μ, cuya norma es denotada por $\|\cdot\|_{m,p,\Omega,d\mu}$.
  En caso de que $p = 2$, se denota $W^{m,2}(\Omega; d\mu) := H^m(\Omega; d\mu)$ con norma $\|\cdot\|_{m,\Omega,d\mu}$.
- En general $H^s(\mathbb{R}^2) = J^{-s}L^2(\mathbb{R}^2)$, denota el espacio de Sobolev de orden $s \in \mathbb{R}$. Y se escribe $H^\infty(\mathbb{R}^2) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^2)$.

- $(f,g)_s$ denota el producto interno en $H^s(\mathbb{R}^2)$, con norma denotada como $\|\cdot\|_{s,2}$. Por esta notación se escribe $\|\cdot\|_0$ en vez de $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

- $\mathcal{F}_{s,(r_1,r_2)}(\mathbb{R}^2) := H^s\left(\mathbb{R}^2\right) \cap L^2((|x|^{2r_1} + |y|^{2r_2})dxdy)$ denota el espacio de Sobolev anisotrópico de orden (r_1, r_2) con $s,\ r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$.

- $B\,(X,Y)$ Denota el espacio de operadores lineales continuos de X en Y. Siendo X y Y de Banach.

- El espacio de Lebesgue en espacio y tiempo se denotará $L^r_T L^p_x L^q_y([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ con $1 \leq p,q,r < \infty$ y la respectiva norma está dada por

$$\|f\|_{L^r_T L^p_x L^q_y} = \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y,t)|^q\,dy\right)^{p/q} dx\right)^{r/p} dt\right)^{1/r}.$$

  con las modificaciones usuales cuando $p,\ q\ $ o $\ T$ sean ∞.

CAPÍTULO 2

Preliminares

En este capítulo se enuncian detalladamente conceptos, definiciones y algunos resultados teóricos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Se omiten las demostraciones de algunos resultados, puesto que son hechos ampliamente tratados en la literatura, sin embargo, se ejemplifican algunos de estos o se dan referencias donde consultarlos.

2.1. Transformada de Fourier.

El concepto de transformada de Fourier, nombrada así en homenaje al matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier $(1768-1830)$, la cual fue introducida para desarrollar dos ideas fundamentales en análisis matemático, la primera de ellas es de expresar funciones periódicas genéricas como superposición de ondas básicas (senos y cosenos) y más generalmente con las conocidas series de Fourier; la segunda idea y no menos importante, es la existencia de una transformación que cambia la diferenciación en un operador de multiplicación, la cual es una herramienta de extrema utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales. A pesar de que historicamente la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$ fue motivada por las series trigonométricas, el tipo de problema de valor incial considerado nos restringe al caso no periódico.

Definición 2.1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ denotada por $\hat{f}$, se define por*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x\cdot\xi)} dx,$$

donde $(x \cdot \xi)$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

A continuación mencionamos una colección de propiedades básicas de la transformada de Fourier.

Proposición 2.1. [25] *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

1. *$f \mapsto \widehat{f}$ define una transformación lineal de $L^1(\mathbb{R}^n)$ a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con*

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq C_n \|f\|_{L^1}.$$

2. *$\widehat{f}$ es una función continua.*

3. *Lema de Riemann-Lebesgue*

$$\widehat{f}(\xi) \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad |\xi| \longrightarrow \infty. \tag{2.1}$$

4. *Si $\tau_h f(x) = f(x-h)$ denota traslación por $h \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-i(h\cdot\xi)}\widehat{f}(\xi),$$

y

$$\left(\widehat{e^{-i(h\cdot\xi)}f}\right)(\xi) = \left(\tau_{-h}\widehat{f}\right)(\xi).$$

5. *Si $T_a f(x) = f(ax)$ denota una dilatación por un factor $a > 0$, entonces*

$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi).$$

6. *Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f * g$ la convolución de f y g. Entonces,*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

7. *Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)\,dy.$$

8. *Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y vale*

$$\partial^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}.$$

9. *Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ con $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$ y $\partial^\alpha f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k-1$, entonces vale*

$$\xi^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{(\partial^\alpha f)}.$$

El siguiente ejemplo ilustra algunas propiedades que en la proposición (2.1) son enunciadas.

Ejemplo 2.1. Si $g_\lambda(x) = e^{-\pi\lambda|x|^2}$, donde $\lambda > 0$, entonces $\widehat{g_\lambda}(\xi) = \lambda^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|x|^2}{\lambda}}$, pues

$$\begin{aligned}\widehat{g_\lambda}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x\cdot\xi)}e^{-\pi\lambda|x|^2}\,dx = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x_k\cdot\xi_k)}e^{-\pi\lambda x_k^2}\,dx_k \\ &= \prod_{k=1}^{n}\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi x_k^2}{\lambda}} = \lambda^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|x|^2}{\lambda}}.\end{aligned}$$

Naturalmente las propiedades de la proposición (2.1) siguen siendo válidas para todo subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$, en particular para la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, además para este caso tenemos que $\widehat{\cdot}$ es un homeomorfismo con la topología usual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.2. [5] *La transformada de Fourier* $\widehat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *es una aplicación lineal continua y con inversa continua.*

Los espacios en el que se basará este trabajo son de tipo L^2, se hace por tanto necesario trabajar con $\widehat{\cdot}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$; apesar de que la integral que define la transformada de Fourier no tiene sentido en general para una función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una manera simple y elegante de extender la teoría para el contexto L^2. El punto clave para esa extensión es el resultado a continuación, donde asumimos $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.3. [19] ***Plancherel.*** *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$*, entonces*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Dado que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces la transformada de Fourier se puede extender de manera única al espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$, además de ser un operador lineal e isométrico, es un operador unitario.

Proposición 2.4. [19] *El operador* $\widehat{\cdot} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ *es unitário, es decir lineal, isométrico y sobreyectivo. Además, su aplicación inversa* $\{\cdot\}^\vee$ *puede ser obtenida por*

$$\check{f}(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{B_r(0)} e^{i(x\cdot\xi)} f(\xi)\, d\xi,$$

donde $B_r(0)$ *denota la bola centrada en el valor* $0 \in \mathbb{R}^n$ *y radio* r*.*

Para terminar esta parte introducimos la transformada de Fourier en el contexto de las distribuciones temperadas, para esto debemos recordar que el espacio vectorial $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ posee una estructura de espacio métrico completo, por medio de la métrica

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \frac{\sup_{z\in\mathbb{R}^n} \left|z^\alpha \partial^\beta (f-g)(z)\right|}{1 + \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \left|z^\alpha \partial^\beta (f-g)(z)\right|},$$

donde la sucesión $\{c_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$, se escoge de tal manera que la serie $\sum c_{\alpha,\beta}$ converja, para α y β multi-indices y así podemos definir su dual topológico.

Definición 2.2. Una distribución temperada es un funcional continuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. El conjunto de todas las distribuciones temperadas es por tanto denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Y la notación usual de la transformada de Fourier y como actua sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es la que se precisa en la siguiente defininción.

Definición 2.3. Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ entonces la transformada de Fourier de f denotada por $\widehat{f}$ es la distribución temperada definida por

$$\langle \widehat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle \quad \text{para todo} \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

El siguiente resultado es una pequeña recopilación de las propiedades como la Proposición (2.1) hace mención, pero en el contexto de las distribuciones temperadas.

Proposición 2.5. [19], [25] *La transformada de Fourier* $\widehat{\cdot} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *es una aplicación lineal continua y con inversa continua. Además*

$$(\widehat{f})^{\vee} = f = \widehat{(f^{\vee})}, \qquad \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f \quad y$$

$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi),$$

$$(-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}(\xi) = (\partial^\alpha \widehat{f})(\xi).$$

2.2. Espacios de Sobolev y buen Planteamiento.

En esta sección introduciremos los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ y posteriormente mencionamos de manera exigua algunas caráteristicas que determinan los problemas bien planteados en ciertos espacios de Hilbert.

Definición 2.4. Sea $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev de orden s denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$, se define por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

con norma $\|\cdot\|_{s,2}$ definida como

$$\|f\|_{s,2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Además

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{s \geq 0} H^s(\mathbb{R}^n).$$

Estos espacios de Sobolev tienen las siguientes propiedades.

Proposición 2.6. [5] *Para* $r, s \in \mathbb{R}$, *los espacios* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *satisfacen:*

1. *El espacio* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio de Hilbert con producto interno* $(\cdot\ ,\ \cdot)_s$, *definido para* $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *como*

$$(f, g)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+ |\ \xi\ |^2)^s \widehat{f}(\xi)\ \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

2. *Si* $r \leq s$ *entonces* $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^n)$, *esto es* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *está densa y continuamente inmerso en* $H^r(\mathbb{R}^n)$ *y además para* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, *tenemos*

$$\|f\|_{r,2} \leq \|f\|_{s,2}.$$

3. $(H^s(\mathbb{R}^n))'$, *el espacio dual de* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es isometricamente isomorfo a* $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$.

4. *(Lema de Sobolev.) Si* $s > \frac{n}{2}$ *entonces existe una constante* C_s *tal que para toda* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$
$$\|f\|_{L^\infty} \leq C_s \|f\|_{s,2}, \tag{2.3}$$
y más precisamente empleando el Lema de Riemman-Lebesgue (2.1), tenemos:
$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n).$$

5. *Dados* $s > 0$ *y* $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tenemos*
$$\|fg\|_{s,2} \leq C_s \left(\|f\|_{s,2}\|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{s,2}\right). \tag{2.4}$$
Y consecuentemente de (2.3) y (2.4)

6. *Sea* $s > \frac{n}{2}$*, entonces* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es un álgebra de Banach. En particular existe una constante* C_s *tal que*
$$\|fg\|_{s,2} \leq C_s \|f\|_{s,2}\|g\|_{s,2} \qquad \textit{para todas} \quad f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Además de las propiedades que poseen los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, enunciamos las siguientes desigualdades de Kato-Ponce.

Proposición 2.7. [10] *Sean* $s \geq 1$ *y* $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *se tiene que*
$$\|[J^s; g]f\|_0 \leq C_s(\|\nabla g\|_{L^\infty}\|J^{s-1}f\|_0 + \|f\|_{L^\infty}\|J^s g\|_0). \tag{2.5}$$
$$\|J^s(gf)\|_0 \leq C_s(\|f\|_{L^\infty}\|J^s g\|_0 + \|g\|_{L^\infty}\|J^s f\|_0). \tag{2.6}$$

Donde $[\,\cdot\,;\,\cdot\,]$ denota el conmutador.

□

Junto con las estimaciones anteriores, mencionamos la regla de Leibniz debida a Kenig C., Ponce G. y Vega L., la cual emplearemos en el siguiente capítulo.

Proposición 2.8. [14] *Sean* $0 < \gamma < 1$ *y* $1 < p < \infty$*, entonces:*
$$\|D^\gamma(fg) - fD^\gamma(g) - gD^\gamma(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{2.7}$$
donde D^γ *denota* D_x^γ *ó* D_y^γ*.*

Por último explicamos la definición de buen planteamiento.

Definición 2.5. Sean X, Y espacios de Banach tales que $Y \hookrightarrow X$, consideremos $T_0 \in (0, \infty)$ y sea $F : [0, T_0] \times Y \to X$ una función continua. Se dice que el problema de valor inicial
$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in X \\ u(0) = \phi \in Y. \end{cases} \tag{2.8}$$
es **localmente bien planteado**, *LBP en Y si satisface:*

1. *Existe $T \in (0, T_0]$ y una función $u \in C([0,T];Y)$ tal que $u(0) = \phi$ y satisface la ecuación diferencial en el siguiente sentido:*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - F(t,u(t)) \right\|_X = 0.$$

donde las derivadas en $t = 0$ y $t = T$ son calculadas por derecha y por izquierda respectivamente.

2. *El problema de valor inicial tiene a lo más una solución en $C([0,T];Y)$.*

3. *La función $\phi \to u$ es continua. Es decir, sean $\phi_n \in Y$, $n = 1,\ 2, \cdots, \infty$, tal que $\phi_n \to \phi_\infty$ en Y y consideramos $u_n \in C([0,T_n];Y)$ la solución correspondiente, entonces existe $T \in (0, T_\infty)$, tal que las soluciones u_n estan definidas en $[0,T]$ para todo n suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

*Si alguna condición falla se dirá que el problema es **mal planteado** . Decimos que el problema es **globalmente bien planteado** y lo notamos como GBP, si T_0 en (2.8) es ∞ y además si el intervalo de existencia $[0,T]$ de la solución u puede ser arbitrariamente grande.*

Proposición 2.9. [5] ***Principio de Extensión.***
Sea $\phi \in Y$ y asuma que (2.8) es localmente bien planteado. Sea

$$T^*(\phi) = sup\{T > 0 : \exists! u \quad \textit{solución de (2.8) en} \quad [0,T]\}$$

entonces se obtiene una sola de las siguientes proposiciones

1. $T^*(\phi) = \infty$

2. $T^*(\phi) < \infty$ *y* $\lim_{t\uparrow T^*} \|\, u(t)\, \|_Y = \infty$

Un elemeto relevante en la teoría del buen planteamiento de (PVI) o problemas de Cauchy, es tener presente el Teorema del punto fijo de Banach. Para poder enunciarlo, necesitamos definir el concepto de contracción:

Definición 2.6. Sea (X,d) un espacio métrico. Una contracción en X es una aplicacion $\Psi : X \to X$ tal que: $d(\Psi(x), \Psi(y)) \leq \kappa d(x,y)$ para todo $x, y \in X$ y algun $\kappa \in (0,1)$.

Así tenemos que

Teorema 2.1. [26] ***Teorema del punto fijo de Banach***
Sea X un espacio métrico completo y supongamos que $\Psi : X \to X$ es una contracción entonces existe un único punto fijo $x_0 \in X$ para Ψ; es decir, existe un único $x_0 \in X$ tal que $\Psi(x_0) = x_0$.

2.3. Desigualdades.

En las siguientes lineas realizamos un breve sumario de desigualdades que empleamos indistintamente.

Lema 2.1. *Sean $a, b \geq 0$ y $s > 0$. Entonces existen constantes positivas m_s y M_s que dependen solamente de s tales que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s + b^s) \tag{2.9}$$

Prueba: Cuando $a = 0$, la desigualdad es trivial, podemos suponer entonces que $a > 0$. Entonces, (2.9) es equivalente a

$$m_s(1 + (\frac{b}{a})^s) \leq (1 + \frac{b}{a})^s \leq M_s(1 + (\frac{b}{a})^s).$$

De esta manera es suficiente probar que hay constantes m_s, M_s tal que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1 + r^s)^s \leq M_s(1 + r^s),$$

para cualquier $r \in (0, \infty)$.
Pero esto se sigue gracias a que la función $F(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s}$ es continua en $(0, \infty)$ y acotada superior e inferiormente. □

Lema 2.2. [5] ***Lema de Gronwall***
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y consideramos $k \in L^1[a, b]$, con $k \geq 0$ y $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ con la condición

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\tau) f(\tau)\, d\tau \quad \textit{para cada} \quad t \in [a, b],$$

entonces

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(\tau) \exp\left(\int_a^\tau k(s)\, ds\right) d\tau.$$

Además si g es una función constante, tenemos:

$$f(t) \leq g \exp\left(\int_a^t k(s)\, ds\right). \tag{2.10}$$

Enuciamos una estimación que será tangente en todo nuestro argumento, la cual es la desigualdad de *Young*.

Proposición 2.10. *Sean f, g cantidades no negativas y $p, q \geq 1$ tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ entonces*

$$fg \leq \frac{f^p}{p} + \frac{g^q}{q}. \tag{2.11}$$

Demostración: Es una consecuencia de la convexidad de la función exponencial exp. □

De (2.11) obtenemos la desigualdad de Hölder:

Teorema 2.2. [28] *Sea (S, Σ, μ) un espacio de medida y sean $p, q \in [1, \infty]$ con $p^{-1}+q^{-1} = 1$. Entonces, para cualesquiera funciones medibles f y g sobre S a valor real o complejo, se tiene:*

$$\int_S |f(x)g(x)|\, d\mu(x) \leq \left(\int_S |f(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_S |g(x)|^q\, d\mu(x)\right)^{1/q}. \qquad (2.12)$$

Con la notación adecuada cuando p o q sean ∞.

Emplearemos indistintamente la desigualdad de Minkowski, cuya demostración se basa en (2.11) y en (2.12).

Teorema 2.3. [28] *Supongamos que (S_1, Σ_1, μ_1) and (S_2, Σ_2, μ_2) dos espacios de medida y consideremos $F : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Así se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\left[\int_{S_2} \left|\int_{S_1} F(x, y)\, d\mu_1(x)\right|^p d\mu_2(y)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_{S_1} \left(\int_{S_2} |F(x, y)|^p\, d\mu_2(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x). \qquad (2.13)$$

Por último enunciamos la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg la cual será importante en los argumentos que desarrollaremos en los dos últimos capítulos.

Teorema 2.4. [29] *Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una aplicación de un conjunto abierto Ω con frontera suave a $\mathbb{R}$. Para valores fijos $1 \leq q, r \leq \infty$ y un natural fijo m, asumimos también que para un número real θ y un número natural j tenemos:*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right)\theta + \frac{1-\theta}{q},$$

y para cada θ con:

$$\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1,$$

entonces cada función u así descrita que pertenezca a L^q con m derivadas en L^r también tiene j derivadas enteras en L^p con $0 \leq j \leq m$, más precisamente existe una constante C dependiendo únicamente de m, n, j, q, r y θ tal que:

$$\left\|\partial^\beta u\right\|_{L^p} \leq C\, \|u\|_{L^q}^{1-\theta} \sum_{|\gamma|=m} \|\partial^\gamma u\|_{L^r}^{\theta}. \qquad (2.14)$$

para todo β con $|\beta| = j$.

2.4. Funciones de corte y sus propiedades.

En esta sección presentamos la familia $\{\chi_{\epsilon,b}\}_{\epsilon>0,\ b\geq 5\epsilon}$ fundamental para la obtención de los resultados de propagación de regularidad y de decaida en la variable x de las soluciones asociadas a la familia de ecuaciones (k-gZK), introducidas en los trabajos [6], [7] y [8]. Dado $\epsilon > 0$ consideramos $b \geq 5\epsilon$ y sean $v_{\epsilon,b}$ funciones tales que:

$$v_{\epsilon,b}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 2\epsilon \\ \frac{1}{b-3\epsilon}x - \frac{2\epsilon}{b-3\epsilon}, & \text{si} \quad x \in [2\epsilon, b-\epsilon] \\ 1, & \text{si} \quad x \geq b-\epsilon, \end{cases}$$

y sea ρ una función integrable, no negativa, infinitamente derivable, cuyo soporte es compacto, más precisamente.

$$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad \rho \geq 0, \qquad \int \rho\, dx = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{supp}(\rho) \subset (-1,1).$$

Podemos definir por tanto:

Definición 2.7. Dado $\epsilon > 0$ y $b \geq 5\epsilon$ denominadas funciones de corte

$$\chi_{\epsilon,b} = \rho_\epsilon * v_{\epsilon,b}(x)$$

en los parametros ϵ y b, donde $*$ es el operador de convolución y $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\rho(\epsilon^{-1}x)$.

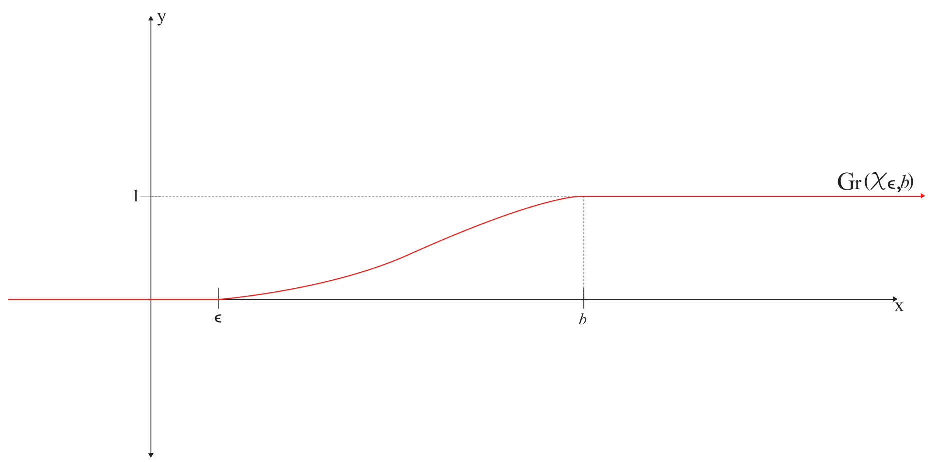


Figura 2.1: Gráfica de la función $\chi_{\epsilon,b}$.

El argumento que usamos en este trabajo utiliza estimativas de energía con el peso $\chi_{\epsilon,b}$, el cual es independiente de la variable y, con lo que recopilamos una serie de propiedades para estas funciones.

Proposición 2.11. *Las funciones de corte $\chi_{\epsilon,b}$, poseen las siguientes propiedades.*

1. $\chi_{\epsilon,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. $\chi'_{\epsilon,b} \geq 0$ *en* $\mathbb{R}$.
3. *En las vecindades* $(-\infty,\epsilon]$ *y* $[b,\infty)$, *admite un valor constante, esto es*
$$\chi_{\epsilon,b} = \begin{cases} 0, & x \leq \epsilon \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$
4. *Se tiene que* $\operatorname{supp}(\chi_{\epsilon,b}) \subset [\epsilon,\infty)$ *y* $\operatorname{supp}(\chi'_{\epsilon,b}) \subset [\epsilon,b]$.
5. *Si* $x \in (3\epsilon, b-2\epsilon)$ *entonces*
$$\chi'_{\epsilon,b} \geq \frac{1}{b-3\epsilon},$$
y para todo $x \in \mathbb{R}$
$$\chi'_{\epsilon,b} \leq \frac{1}{b-3\epsilon}.$$

6. *Para cada* $j \in \mathbb{Z}^+$, *tenemos que existe* C_j *tal que* $|\chi_{\epsilon,b}^{(j)}| \leq C_j \chi_{\frac{\epsilon}{3},b+\epsilon}$ *en* $\mathbb{R}$.
7. $\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon} = 1$ *en* $\text{supp}(\chi_{\epsilon,b})$.

Demostración:

1. Consecuencia de $\partial_x^\alpha(\rho_\epsilon * v_{\epsilon,b}) = (\partial_x^\alpha \rho_\epsilon) * v_{\epsilon,b}$ y $\rho_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
2. Si $x_1 \leq x_2$, esto es $(x_1 - \tau) \leq (x_2 - \tau)$ para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$, de modo que
$$v_{\epsilon,b}(x_1 - \tau) \leq v_{\epsilon,b}(x_2 - \tau).$$
Luego, multiplicando por el factor $\rho_\epsilon(\tau)$ e integrando en la variable τ se sigue que
$$\chi_{\epsilon,b}(x_1) \leq \chi_{\epsilon,b}(x_2),$$
al ser $\chi_{\epsilon,b} \in C^\infty$ y creciente, deduciomos que $\chi'_{\epsilon,b} \geq 0$ en $\mathbb{R}$.
3. Partiendo del hecho $-\epsilon \leq x - y \leq \epsilon$, tenemos que $-\epsilon + x \leq y \leq \epsilon + x$ de modo que si $x \leq \epsilon$, $y \leq 2\epsilon$, y así la función $v_{\epsilon,b}(y) = 0$. Por otro lado, si $x \geq b, y \geq b - \epsilon$ a diferencia del anterior caso, la función $v_{\epsilon,b}(y) = 1$. Con lo que
$$\chi_{\epsilon,b}(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x-y) v_{\epsilon,b}(y) dy = 0 & \text{si,} \qquad x \leq \epsilon \\ \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x-y) v_{\epsilon,b}(y) dy = 1 & \text{si,} \qquad x \geq b. \end{cases}$$
4. Puesto que el soporte de una convolución $*$, es la suma de los soportes, tenemos
   - $\text{supp}(\chi_{\epsilon,b}) \subset \text{supp}(\rho_\epsilon) + \text{supp}(v_{\epsilon,b}) \subset [\epsilon, \infty)$
   - $\text{supp}(\chi'_{\epsilon,b}) \subset \text{supp}(\rho_\epsilon) + \text{supp}(v'_{\epsilon,b}) \subset [\epsilon, b]$,

   donde la derivada $v'_{\epsilon,b}$ es tomada en el sentido distribucional.
5. Si $x \in [3\epsilon, b - 2\epsilon]$ tenemos que
$$\chi'_{\epsilon,b} = \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(y) v'_{\epsilon,b}(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(y) \frac{1}{b - 3\epsilon} 1_{[2\epsilon, b-\epsilon]} dy = \frac{1}{b - 3\epsilon},$$
pues $v_{\epsilon,b}$ es diferenciable en $[2\epsilon, b-\epsilon]$ y evidentemente $x - y \in [2\epsilon, b - \epsilon]$, y esta región es donde alcanza su valor máximo en $\mathbb{R}$ de modo que:
$$\chi'_{\epsilon,b} = \int_{x-b+\epsilon}^{x-2\epsilon} \rho_\epsilon(y) \frac{1}{b-3\epsilon} dy \leq \frac{1}{b-3\epsilon} \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(y) dy = \frac{1}{b-3\epsilon}.$$
6. Sabemos que el $\text{supp}(\chi_{\epsilon,b}^j) \subset [\epsilon, b]$ y $\text{supp}(\chi'_{\frac{\epsilon}{3},b+\epsilon}) \subset \left[\frac{\epsilon}{3}, b + \epsilon\right]$, lo que motiva a dividir la recta numérica en los siguientes subintervalos:
$$(\infty, \frac{\epsilon}{3}] \cup [\frac{\epsilon}{3}, \epsilon] \cup [\epsilon, b] \cup [b, b+\epsilon] \cup [b+\epsilon, \infty),$$
y analizar en cada región si es verdadera la desigualdad deseada:

- Evidentemente en $(\infty, \frac{\epsilon}{3}] \cup [b+\epsilon, \infty)$ tenemos:

$$\chi^{j}_{\epsilon,b+\epsilon} = \chi'_{\frac{\epsilon}{3},b+\epsilon} = 0.$$

- Si $x \in [\frac{\epsilon}{3}, \epsilon] \cup [b, b+\epsilon]$, tenemos que $\chi^{j}_{\epsilon,b+\epsilon} = 0$ y así la desigualdad es cierta por 2..

- De 5. tenemos que

$$\chi'_{\epsilon,b}(x) = \frac{1}{b-3\epsilon} 1_{[2\epsilon,b-2\epsilon]}(x) \quad \text{si} \quad x \in [2\epsilon, b-\epsilon],$$

de modo que

$$\chi'_{\frac{\epsilon}{3},b+\epsilon}(x) = \frac{1}{b} 1_{[\frac{2\epsilon}{3},b+\frac{\epsilon}{3}]}(x) \quad \text{si} \quad x \in \left[\frac{2}{3}\epsilon, b+\frac{2}{3}\epsilon\right].$$

Con lo que si $x \in [\epsilon, b]$ se sigue

$$\mid \chi^{j}_{\epsilon,b}(x) \mid \leq \left(\max_{x} \mid \chi^{j}_{\epsilon,b}(x) \mid\right) b \, \frac{1}{b} \, 1_{[\epsilon,b+\frac{\epsilon}{3}]}(x),$$

esto es

$$\mid \chi^{(j)}_{\epsilon,b}(x) \mid \leq C_j \chi'_{\frac{\epsilon}{3},\epsilon+b}(x).$$

donde $C_j = \max_{x} \mid \chi^{j}_{\epsilon,b}(x)) \mid b$.

Los tres casos anteriores verifican la afirmación 6..

7. Por 4. $\operatorname{supp}(\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}) \subset [\frac{\epsilon}{5}, \infty)$ y por 3. si $x \geq \epsilon$, $\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(x) = 1$. □

Para estudiar la decaida en la variable espacial x, asociado al (PVI) (1.1) tenemos presente el peso $\chi_{n,\epsilon,b}$ que precisamos a continuación.

Definición 2.8. Para $\epsilon > 0, b \geq 5\epsilon$ definimos las funciones de corte en los parametros ϵ y b de orden n,

$$\chi_{n,\epsilon,b}(x) := x^n \chi_{\epsilon,b}(x),$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $\chi_{\epsilon,b}$ la función de corte.

En el último capítulo de este trabajo se dispone a estudiar estimativas de energía con peso $\chi_{n,\epsilon,b}$, por lo que incluimos algunas propiedades:

Proposición 2.12. *En las condiciones de la **Definición 2.8.** se tiene que:*

1. $\chi_{n,\epsilon,b} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

2. $\operatorname{supp}(\chi_{n,\epsilon,b}) \subset [\epsilon, \infty)$.

3.
$$\chi'_{n,\epsilon,b} \geq c\chi_{n-1,\epsilon,b} \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \quad \text{para cualquier} \quad n \in \mathbb{Z}^{+}. \tag{2.15}$$

4.
$$| \chi_{n,\epsilon,b}^{(j)}(x) | \leq C_{n,\epsilon,b} + \chi_{n,\epsilon,b}(x). \tag{2.16}$$

para $x \in \mathbb{R}$ *y cualesquiera* $j, n \in \mathbb{Z}^+$

5.
$$| \chi_{n,\epsilon,b}^{(k)} | \leq C\chi_{\frac{\epsilon}{3},b+\epsilon} \tag{2.17}$$

en $\mathbb{R}$*, siempre que* $k > n$.

6.
$$\chi_{j,\epsilon,b} \leq C_{j,\epsilon,b} + \chi_{n,\epsilon,b} \quad en \quad \mathbb{R} \quad para \quad 1 \leq j \leq n. \tag{2.18}$$

Para culminar con esta sección mencionamos una de las acotaciones que es útil en todo el argumento que llevaremos a cabo en el capítulo 4.

Proposición 2.13. *Sea* $\chi_{\epsilon,b}(x)$ *la función de corte con parámetros* ϵ *y* b*, y sea* f *una función de manera que* $f \in H^1(\mathbb{R}^2; \chi_{\epsilon,b}(x)dxdy)$*, entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} f^4 \chi_{\epsilon,b}^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \left(f^2 \chi_{\epsilon,b} + (\partial_x f)^2 \chi_{\epsilon,b} + (\partial_y f)^2 \chi_{\epsilon,b} + f^2 \chi_{\epsilon,b}' \right) dxdy. \tag{2.19}$$

Demostración.
Por el Teorema fundamental del cálculo, tenemos

- $f^2(x,y)\chi_{\epsilon,b}(x) \leq \int_{\mathbb{R}} 2|f(x,y)|\,|\partial_x f(x,y)|\,\chi_{\epsilon,b}(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} f^2(x,y)\chi_{\epsilon,b}'(x)\,dx := g(y).$
- $f^2(x,y)\chi_{\epsilon,b}(x) \leq \int_{\mathbb{R}} 2|f(x,y)|\,|\partial_y f(x,y)|\,\chi_{\epsilon,b}(x)\,dy := h(x).$

de lo cual se sigue

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^4(x,y)\chi_{\epsilon,b}^2 \, dxdy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx \right)$$

Así las anteriores desigualdades y la desigualdad de Young (2.11) deducimos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^2} f^4 \chi_{\epsilon,b}^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(2\int_{\mathbb{R}^2} \left(|f||\partial_x f|\chi_{\epsilon,b} + f^2\chi_{\epsilon,b}' \right) dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \left(2\int_{\mathbb{R}^2} |f||\partial_y f|\chi_{\epsilon,b}\,dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^2\chi_{\epsilon,b} + \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x f)^2\chi_{\epsilon,b} + \int_{\mathbb{R}^2} f^2\chi_{\epsilon,b}' \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^2\chi_{\epsilon,b} + \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y f)^2\chi_{\epsilon,b} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^2} f^2\chi_{\epsilon,b} + \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x f)^2\chi_{\epsilon,b} + \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y f)^2\chi_{\epsilon,b} + \int_{\mathbb{R}^2} f^2\chi_{\epsilon,b}' \right).
\end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO 3

Acerca del buen planteamiento para la ecuación (k-gZK).

La finalidad de este capítulo, es realizar un breve recorrido por el buen planteamiento de la familia de ecuaciones (k-gZK) bidimensional en los espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, dentro del cual aparecen estimativas que son fundamentales para nuestro trabajo de propagación de regularidad.
Mas precisamente, en esta sección inicialmente se presentan resultados acerca del grupo $W(t)$ asociado a la ecuación (ZK) lineal. En seguida, se procede al desarrollo del buen planteamiento del (PVI) asociado a la ecuación (ZK), la cual fue ya verificada en [17], pero aquí presentamos todos los detalles; posteriormente se realiza una colección de resultados debidos a F. Linares y A. Pastor del buen planteamiento a la familia de ecuaciones (k-gZK) y finalizamos con algunas estimativas que en los siguientes capítulos son requeridas.

3.1. Propiedades del grupo $W(t)$.

A continuación enunciamos una defінción y algunos resultados que son conocidos para el grupo $W(t)$ asociado a la ecuación (ZK) lineal mencionando las respectivas referencias.
Consideramos inicialmente el siguiente (PVI)

$$\begin{cases} w_t + \partial_x(\Delta w) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ t \in \mathbb{R}, \\ w(x, y, 0) = w_0(x, y). \end{cases} \tag{3.1}$$

La solución w de (3.1) es expresada en términos del grupo unitario $W(t)$ definido vía la transformada de Fourier:

$$w(x, y, t) := W(t)w_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it\xi^3 + it\xi\eta^2 + ix\cdot\xi + iy\cdot\eta} \widehat{w}_0(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Por otro lado en F. Linares y A. Pastor muestran la estimación de Strichartz satisfecha por el grupo.

Lema 3.1. [17] *Sea* $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ *y* $T > 0$. *Entonces el grupo* $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *satisface:*

$$\|W(t)f\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} \leq C T^\gamma \|D_x^{-\epsilon/2} f\|_{L^2_{x,y}}, \tag{3.2}$$

donde $\gamma = \frac{1-\epsilon}{6}$ *siempre que el lado derecho de (3.2) sea finito.*

Ahora enunciamos otro resultado el cual es debido a Faminski en su trabajo para el buen planteamiento en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ con derivada entera.

Lema 3.2. [1] *Sea* $T > 0$*, y consideremos* $t \in [-T, T]$*, el grupo* $W(t)$ *satisface las siguientes acotaciones.*

1. *Sea* $w_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$*, satisface el efecto regularizante:*

$$\|\partial_x W(t) w_0\|_{L_x^\infty L_{y,t}^2} \leq C\|w_0\|_{L_{x,y}^2}. \tag{3.3}$$

y la relación de Strichartz,

$$\|W(t)w_0\|_{L_T^3 L_{x,y}^\infty}. \leq C\|w_0\|_{L_{x,y}^2}. \tag{3.4}$$

2. *Sea* $w_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *con* $s > \frac{3}{4}$*. Entonces* $W(t)$ *satisface la estimación máximal,*

$$\|W(t)w_0\|_{L_x^2 L_{y,T}^\infty} \leq C(s,T)\|w_0\|_{s,2}. \tag{3.5}$$

3.2. Familia $\mathcal{X}_T^k$.

En esta sección se enuncia y se dan referencias para el buen planteamiento de la familia de ecuaciones (k-gZK), inicialmente vemos el buen planteamiento para el (PVI) asociado a la ecuación (ZK) resultado que detallamos del trabajo ya vericado en [17], consecuentemente se presenta el espacio $\mathcal{X}_T^1$. Posteriormente, se enuncian los espacios $\mathcal{X}_T^k$ donde hay buen planteamiento asociado a cada ecuación (k-gZK) con $k \geq 2$.

Teorema 3.1. *Para cualquier* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$*, con* $s > \frac{3}{4}$*, existe* $T = T(\|u_0\|_{s,2}) > 0$ *y una única solución del problema de valor inicial (ZK)* $u(\cdot)$*, definida en el intervalo* $[0, T]$ *tal que:*

$$u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)), \tag{3.6}$$

$$\|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{y,T}^2} + \|D_y^s u_x\|_{L_x^\infty L_{y,T}^2} < \infty, \tag{3.7}$$

$$\|u_x\|_{L_T^2 L_{x,y}^\infty} < \infty, \tag{3.8}$$

$$\|u\|_{L_x^2 L_{y,T}^\infty} < \infty. \tag{3.9}$$

Además se satisface que para cualquier $T' \in (0, T)$ *existe una vecindad* V *de* u_0 *en* $H^s(\mathbb{R}^2)$ *tal que la aplicación* $\widetilde{u_0} \to \widetilde{u}(t)$ *de* V *en la clase definida (3.6)-(3.9) denominada* $\mathcal{X}_T$ *es Lipshitz continua.*

Demostración
Comenzamos considerando el operador integral:

$$\Psi(u)(t) = W(t)u_0 + \int_c^z W(t-t')(uu_x)(t')dt', \tag{3.10}$$

por otro lado, definimos el espacio métrico

$$\mathcal{X}_T = \left\{ u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)) \ ; \ ||| \ u \ ||| < \infty \right\},$$

donde

$$||| \ u \ ||| := \|u\|_{L^\infty_T H^s_{x,y}} + \|D^s_x u_x\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} + \|D^s_y u_x\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} + \|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} + \|u\|_{L^2_x L^\infty_{y,x}},$$

procedemos a verificar que Ψ así definida (3.10) resulta una contracción en las siguientes bolas cerradas de $\mathcal{X}_T$

$$\mathcal{X}^a_T = \{u \in \mathcal{X}_T \ ; \ ||| \ u \ ||| \leq a\}.$$

donde $a, \ T > 0$ son valores que serán escogidas más adelante pues dependerá cuando la función Ψ la cual aplica del espacio $\mathcal{X}^a_T$ a él mismo y $\Psi : \mathcal{X}^a_T \longrightarrow \mathcal{X}^a_T$ sea contracción.

Por simplicidad, supondremos $\frac{3}{4} < s < 1$ para poder emplear las acotaciones con la derivada fraccionaria (2.7), pues el caso general se sigue descomponiendo el índice de regularidad $s = \lfloor s \rfloor + r$ con $r \in (0,1)$, donde la aplicación $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera, también suponemos que $0 < T \leq 1$.

Empezamos por estimar la norma en $H^s(\mathbb{R}^2)$ de $\Psi(u)$ para $u \in \mathcal{X}^a_T$, esto es estimando la norma $\| \cdot \|_0$ y posteriormente $\|D^s \cdot \|_0$. Así por la desigualdad de Minkowski y al ser el grupo $W(t)$ un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^2)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)(t)\|_{L^2_{x,y}} &\leq \|W(t)u_0\|_{L^2_{x,y}} + \left\| \int_0^t W(t-t')(uu_x)(t')dt' \right\|_{L^2_{x,y}} \\
&\leq \|u_0\|_{L^2_{x,y}} + \int_0^T \|(uu_x)(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' \\
&\leq \|u_0\|_{L^2_{x,y}} + \int_0^T \|u(t')\|_{L^2_{x,y}} \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}} dt' \\
&\leq \|u_0\|_{L^2_{x,y}} + C_s \|u\|_{L^\infty_T H^s_{x,y}} \|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} T^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u_0\|_{L^2_{x,y}} + C_s T^{\frac{1}{2}} \ ||| \ u \ |||^2 .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora estimemos para cada t las cantidades $\|D^s_x \Psi(u)(t)\|_{L^2_{x,y}}$ y $\|D^s_y \Psi(u)(t)\|_{L^2_{x,y}}$ empleando los Lemas (3.1) (3.2) y la desigualdad de Minkowski tenemos:

$$\begin{aligned}
\|D^s_x \Psi(y)(t)\|_{L^2_{x,y}} &\leq \|D^s_x W(t) u_0\|_{L^2_{x,y}} + \int_0^t \|D^s_x W(t-t')(uu_x)(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' \\
&\leq C\|u_0\|_{s,2} + \int_0^t \|D^s_x W(t-t')(uu_x)(t')\|_{L^2_{x,y}} dt'
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Pero empleando la regla de Leibniz para las derivadas fraccionarias (2.7), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|D^s_x (uu_x)(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' &\leq \int_0^t \|u D^s_x u_x(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' + \int_0^t \|u_x D^s_x u(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' + \\
&\quad + \int_0^t \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}} \|D^s_x u\|_{L^2_{x,y}} dt' \\
&\leq \int_0^t \|u D^s_x u_x(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' + 2 \int_0^t \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}} \|D^s_x u\|_{L^2_{x,y}} dt' \\
&= \mathbb{I}_1(t) + \mathbb{I}_2(t),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Iniciamos con la acotación para la cantidad $|\ \mathbb{I}_2(t)\ |$,

$$
\begin{aligned}
|\ \mathbb{I}_2(t)\ | &= \int_0^t \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}} \|D_x^s u\|_{L^2_{x,y}}\, dt' \\
&\leq C_s T^{\frac{1}{2}} \|D_x^s u\|_{L^\infty_T L^2_{x,y}} \|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} \\
&\leq C_s T^{\frac{1}{2}}\ |||\ u\ |||\ .
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Ahora consideramos la acotación de $|\mathbb{I}_1(t)|$, veamos

$$
\begin{aligned}
|\ \mathbb{I}_1(t)\ | &\leq T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u D_x^s u_x(t')\|^2_{L^2_{x,y}} dt' \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= T^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^T |\ u D_x^s u_x(t')\ |^2\ dt' dy dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^\infty \|u(x)\|^2_{L^\infty_{y,T}} \left(\int_{-\infty}^\infty \int_0^T |\ D_x^s u_x(t')\ |^2\ dt' dy \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^{\frac{1}{2}} \|D_x^s u_x\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} \|u\|_{L^2_x L^\infty_{y,T}}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Asi que de (3.12)-(3.15) obtenemos finalmente

$$
\|D_x^s \Psi(u)(t)\|_{L^2_{x,y}} \leq C\|u_0\|_{s,2} + CT^{\frac{1}{2}}\ |||\ u\ |||^2\ . \tag{3.16}
$$

Razonando de manera similar con la cantidad $\|D_y^s \Psi(u)(t)\|_{L^2_{x,y}}$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\|D_y^s \Psi(u)(t)\|_{L^2_{x,y}} &\leq C\|u_0\|_{s,2} + CT^{\frac{1}{2}} \|D_y^s u_x\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} \|u\|_{L^2_x L^\infty_{y,T}} \\
&\leq C\|u_0\|_{s,2} + CT^{\frac{1}{2}}\ |||\ u\ |||^2\ .
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Por tanto de (3.11)-(3.16) y (3.17) deducimos

$$
\|\Psi(u)\|_{L^\infty_T H^s_{x,y}} \leq C\|u_0\|_{s,2} + CT^{\frac{1}{2}}\ |||\ u\ |||^2\ . \tag{3.18}
$$

Procedamos ahora a estimar la cantidad $\|\partial_x \Psi(u)\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}}$. Teniendo en cuenta (3.2) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x \Psi(u)\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} &\leq \|W(t)\partial_x u_0\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} + \left\| \int_0^t W(t-t')(u u_x(t'))dt' \right\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} \\
&\leq CT^\gamma \|D_x^{-\frac{\epsilon}{2}} \partial_x u_0\|_{L^2_{x,y}} + \left\| W(t) \int_0^t W(-t')(u u_x(t')) 1_{[0,t]}(t') dt' \right\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} \\
&\leq CT^\gamma \|D_x^{-\frac{\epsilon}{2}} \partial_x u_0\|_{L^2_{x,y}} + \int_0^T \|D_x^{-\frac{\epsilon}{2}} \partial_x (u u_x)(t')\|_{L^2_{x,y}} dt'.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Pero como s es fijo, escogemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, más precisamente $1 - \frac{\epsilon}{2} < s$, con lo que por (3.19) tenemos

$$
\|\partial_x \Psi(u)\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} \leq CT^\gamma \|u_0\|_{s,2} + \int_0^T \|D_x^s (u u_x)(t')\|_{L^2_{x,y}} dt', \tag{3.20}
$$

luego por las acotaciones en (3.13)-(3.15) y (3.20) se sigue:

$$\|\partial_x \Psi(u)\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} \leq CT^\gamma \|u_0\|_{s,2} + CT^{\frac{1}{2}} \;|||\; u \;|||^2 \;. \tag{3.21}$$

Ahora desarrollaremos las acotaciones necesarias para $\|D^s_x \partial_x \Psi(u)\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}}$, involucrando las diferentes herramientas que ya hemos estudiado hasta aquí, como por ejemplo (3.3), las acotaciones logradas en (3.13)-(3.15) y la desigualdad de Minkowski (2.13). Así tenemos;

$$\begin{aligned}\|D^s_x \partial_x \Psi(u)\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} &\leq \|\partial_x W(t) D^s_x u_0\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} \\ &\quad + \left\| \partial_x W(t) \left(\int_0^T W(-t') D^s_x (uu_x)(t') 1_{[0,t]}(t') dt' \right) \right\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} \\ &\leq \|D^s_x u_0\|_{L^2_{x,y}} + C \int_0^T \|D^s_x (uu_x)(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' \\ &\leq C\|u_0\|_{s,2} + C \;|||\; u \;|||^2 \; T^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

De manera análoga logramos la estimativa:

$$\|D^s_y \partial_x \Psi(u)\|_{L^\infty_x L^2_{y,T}} \leq C\|u_0\|_{H^s_{x,y}} + C \;|||\; u \;|||^2 \; T^{\frac{1}{2}}.$$

Resta por estudiar la cantidad $\|\Psi(u)\|_{L^2_x L^\infty_{y,T}}$, aquí tendremos en cuenta la estimación máximal para el grupo $\{W(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ (3.5) y así se sigue que:

$$\begin{aligned}\|\Psi(u)\|_{L^2_x L^\infty_{y,T}} &\leq \|W(t)u_0\|_{L^2_x L^\infty_{y,T}} + \left\| W(t) \left(\int_0^T W(-t')(uu_x)(t') 1_{[0,t]}(t') dt' \right) \right\|_{L^2_x L^\infty_{y,T}} \\ &\leq C\|u_0\|_{L^2_{x,y}} + \int_0^T \|uu_x(t')\|_{L^2_{x,y}} dt' \\ &\leq C\|u_0\|_{s,2} + \int_0^T \|u(t')\|_{L^2_{x,y}} \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}} dt' \\ &\leq C\|u_0\|_{s,2} + T^{\frac{1}{2}} \|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{x,y}} \|u\|_{L^\infty_T H^s_{x,y}} \\ &\leq C\|u_0\|_{s,2} + T^{\frac{1}{2}} \;|||\; u \;|||^2 \;.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Por tanto de (3.18), (3.21)-(3.23) se deduce que:

$$|||\; \Psi(u) \;||| \leq C_s \|u_0\|_{s,2} + C_s T^{\frac{1}{2}} \;|||\; u \;|||^2 \;. \tag{3.24}$$

De modo que teniendo (3.24) y tomando $a = 2C(s,t)\|u_0\|_{s,2}$ y escogiendo $T > 0$ el mínimo valor entre 1 y el que hace que la desigualdad

$$aC(s,T)T^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4},$$

con $u \in \mathcal{X}_T^a$ sea cierta, obtenemos:

$$\begin{aligned}
|||\ \Psi(u)\ ||| &\leq \frac{a}{2} + a^2 C(s,t) T^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{a}{2} + a C(s,t) T^{\frac{1}{2}} \ ||\ u_0\ ||_{s,2} \\
&\leq \frac{a}{2} + \frac{1}{2} C(s,t)\ ||\ u_0\ ||_{s,2} \\
&\leq \frac{3a}{4}.
\end{aligned}$$

Con lo que si $u \in \mathcal{X}_T^a$ tenemos que $\Psi(u) \in \mathcal{X}_T^a$. Un argumento similar demuestra que si $u, v \in \mathcal{X}_T^a$ entonces

$$\begin{aligned}
|||\ \Psi(u) - \Psi(v)\ |||_T &\leq C T^{\frac{1}{2}} (|||\ u\ |||_T + |||\ v\ |||_T)\ |||\ u - v\ |||_T \\
&\leq 2 C T^{\frac{1}{2}}\ |||\ u - v\ |||_T\ .
\end{aligned}$$

Con la escogencia de a y T como antes, tenemos que Ψ es una contracción en el espacio métrico $\mathcal{X}_T^a$ el cual es completo y de este modo por el Teorema (2.1), tenemos:

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^T W(t - t')(uu_x)(t')dt', \tag{3.25}$$

Para un único $u \in \mathcal{X}_T^a$.

□

El anterior Teorema (3.1) hace parte de una familia de resultados dada por F. Linares y A. Pastor [18], [17] y L.G Farah, F. Linares y A. Pastor [2] para el PVI (k-gZK) si

$$s_k = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq k \leq 7 \\ 1 - \frac{2}{k} & \text{si } k \geq 8. \end{cases}$$

De manera más precisa dicho trabajo simplificadamente dice:

Teorema 3.2. *Para cualquier $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $\quad s > s_k$ existen $T = T(||\ u_0\ ||_{s_k,2}) > 0$, un subespacio $\mathcal{X}_T^k \subset C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$ y una única solución $u \in \mathcal{X}_T^k$ al (PVI) asociado a la familia (k-gZK) definida en $[0,T]$. Además para cualquier $T' \in (0,T)$ existe una vecidad V de u_0 en $H^s(\mathbb{R}^2)$ tal que la aplicacion $\widetilde{u_0} \to \widetilde{u}(t)$ es Lipschitz continua de V en el subespacio $\mathcal{X}_{T'}^k$.*

Estos subespacios $\mathcal{X}_T^k$ son:

$$\mathcal{X}_T^k = \{u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))\ \ : |||\ u\ |||_k < \infty\},$$

donde

$$\begin{aligned}
|||\ u\ |||_k = \|u\|_{L_T^\infty H_{x,y}^{s_k+}} + \|u\|_{L_T^{p_k} L_{x,y}^\infty} \\
+ \|D_x^s u_x\|_{L_x^2 L_{y,x}^\infty} + \|D_y^s u_x\|_{L_x^2 L_{y,T}^\infty} + \|u_x\|_{L_T^{m_k} L_{x,y}^\infty} + \|u\|_{L_x^{l_k} L_{y,x}^\infty},
\end{aligned}$$

con s_k como antes, observamos por el Teorema (3.1) que el sumando $\|u\|_{L_T^{p_1} L_{x,y}^\infty}$ no aparece en $\mathcal{X}_T^1$ y en general tenemos:

$$p_k = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad k = 2 \\ \frac{12(k-1)}{7-12\gamma} & \text{si} \ \ 3 \leq k \leq 7 \\ \frac{2(k-2)}{1-2\gamma} & \text{si} \ \ 8 \leq k, \end{cases}$$

para γ suficientemente pequeño en cada caso. Tenemos también que:

$$m_k = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad k = 1 \\ \frac{9}{4} & \text{si} \quad k = 2 \\ \frac{12}{5} & \text{si} \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Y por último:

$$l_k = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad k = 1, 2 \\ 4 & \text{si} \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Así queda totalmente determinado el espacio $\mathcal{X}_T^k$.

3.3. Estimativas *a priori.*

El objetivo de esta subsección es demostrar que para $s > 1$ tenemos que:

$$\|\partial_y u\|_{L_T^3 L_{x,y}^\infty} \leq C\,(s;T)\,\|u_0\|_{s,2}, \tag{3.26}$$

para u solución (3.2) del (PVI) asociado a la ecuación (1.1), pues es un elemento importante para el resultado de propagación y decaida en la variable x que se discute en los siguientes capítulos respectivamente. Además, mediante este resultado obtendremos varias estimaciones igualemente relevantes en este estudio.
Inicialmente veamos dicha estimación (3.26) pero para el grupo asociado (3.1) en el siguiente resultado:

Lema 3.3. *Sea $w_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 1$. Entonces $w(t) := W(t)w_0$ satisface:*

$$\|w_y\|_{L_T^3 L^\infty} \leq C\|w_0\|_{1^+,2} \tag{3.27}$$

Demostración:

Para $s > 1$, tenemos de (3.4),

$$\|w_y\|_{L_T^3 L_{x,y}^\infty} = \|W(t)\partial_y w_0\|_{L_T^3 L_{x,y}^\infty} \leq \|\partial_y w_0\|_{L_{x,y}^2} \leq \|w_0\|_{s,2}.$$

$\square$

Por otra parte, teniendo presente que u es solución del (PVI) asociado a la ecuación (1.1), tenemos que u satisface la ecuación integral:

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t')(u^k u_x)(t')dt', \tag{3.28}$$

pues cada uno de ellos fue argumentado vía el Teorema (2.1). Con lo que al aplicar el operador ∂_y en la fórmula integral (3.28), obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_y u(t) = W(t)\partial_y u_0 &+ \int_0^t W(t-t')(\partial_y(u^k)u_x)(t')dt' \\ &+ \int_0^t W(t-t')(u^k \partial_{xy} u)(t')dt' \end{aligned} \tag{3.29}$$

Así que si en (3.29), aplicamos la norma en el espacio mixto $L^3_T L^\infty_{x,y}$ temporal-espacial $\|\cdot\|_{L^3_T L^\infty_{x,y}}$, obtenemos con $s = 1^+$, del Lema (3.2) y de la desigualdad de Minkowski (2.13):

$$\begin{aligned}
\|\partial_y u(t)\|_{L^3_T L^\infty_{x,y}} &\leq \|u_0\|_{s,2} + \left\| \int_0^T W(t-t') \left[ku^{k-1}(t') u_y(t') u_x(t')\right] 1_{[0,t]}(t')\, dt' \right\|_{L^3_T L^\infty_{x,y}} \\
&\quad + \left\| \int_0^T W(t-t') \left[u^k(t') \partial_{xy} u(t')\right] 1_{[0,t]}(t')\, dt' \right\|_{L^T_3 L^\infty_{x,y}} \\
&\leq \|u_0\|_{s,2} + k \int_0^T \|u^{k-1}(t') u_y(t') u_x(t')\|_{L^2_{x,y}}\, dt' \\
&\quad + \int_0^T \|u^k(t') \partial_{xy} u(t')\|_{L^2_{x,y}}\, dt' \\
&= \|u_0\|_{s,2} + \mathbb{I}_k + \mathbb{J}_k
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Pero la cantidad $\mathbb{I}_k$ resulta acotada pues empleando el Lema de Sobolev (2.3), conseguimos:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{I}_k| &\leq k \int_0^T \|u(t')\|^{k-1}_{L^\infty_{x,y}} \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}} \|u_y(t')\|_{L^2_{x,y}}\, dt' \\
&\leq C \int_0^T \|u(t')\|^k_{s,2} \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}}\, dt' \\
&\leq C \|u\|^k_{L^\infty_T H^{1+}} \int_0^T \|u_x(t')\|_{L^\infty_{x,y}}\, dt' \\
&\leq C T^{1/m_k'} \|u_x\|_{L^{m_k}_T L^\infty_{x,y}} \|u\|^k_{L^\infty_T H^s}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Con m_k como en el Teorema de Existencia (3.2) y m_k' su exponente conjugado.
Ahora para acotar la cantidad determinada por $\mathbb{J}_k$, lo dividimos en diferentes casos, veamos:

- **Caso $k = 1$.**

$$\begin{aligned}
|\mathbb{J}_1| &= \int_0^T \|u(t') \partial_{xy} u(t')\|_{L^2_{x,y}}\, dt' \\
&\leq T^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}\times[0,T]} |u(x,y,t) \partial_{xy} u(x,y,t)|^2\, dydt\, dx \right)^{1/2} \\
&\leq T^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(x)\|^2_{L^\infty_{yT}} \|\partial_{xy} u(x)\|^2_{L^2_{yT}}\, dx \right)^{1/2} \\
&\leq T^{1/2} \|\partial_{xy} u\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} \|u\|_{L^2_x L^\infty_{yT}}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

- **Caso $k = 2$.**

$$\begin{aligned} |\mathbb{J}_2| &= \int_0^T \|u^2(t')\partial_{xy}u(t')\|_{L^2_{x,y}}\, dt' \\ &\leq T^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}\times[0,T]} |u(x,y,t)|^2|\partial_{xy}u(x,y,t)|^2\, dydt\, dx\right)^{1/2} \\ &\leq T^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^{1+}}|\mathbb{J}_1^{mZK}|. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Pero el término $|\mathbb{J}_1^{mZK}|$ resulta acotado, pues podemos aplicar el mismo argumento que en (3.32), ya que para las soluciones del (PVI) asociado a la ecuación (mZK) satisfacen las estimativas $\|\partial_{xy}u\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} < \infty$ y además $\|u\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} < \infty$, consecuentemente $|\mathbb{J}_2| < \infty$.

- **Caso $k \geq 3$.** Para este caso tenemos que $l_k = 4$, consiguiendo:

$$\begin{aligned} |\mathbb{J}_k| &= \int_0^T \|u^k(t')\partial_{xy}u(t')\|_{L^2_{x,y}}\, dt' \\ &\leq T^{1/2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} |u^k(x,y,t)\partial_{xy}u(x,y,t)|^2\, dxdy\, dt\right)^{1/2} \\ &\leq T^{1/2}\|u\|^{k-2}_{L^\infty_T H^{1+}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}\times[0,T]} |u(x,y,t)|^4|\partial_{xy}u(x,y,t)|^2\, dydt\, dx\right)^{1/2} \\ &\leq T^{1/2}\|u\|^{k-2}_{L^\infty_T H^{1+}}\left(\int_{\mathbb{R}} \|u(x)\|^4_{L^\infty_{yT}}\int_{\mathbb{R}\times[0,T]} |\partial_{xy}u(x,y,t)|^2\, dydt\, dx\right)^{1/2} \\ &\leq T^{1/2}\|u\|^{k-2}_{L^\infty_T H^{1+}}\|\partial_{xy}u\|_{L^\infty_x L^2_{yT}}\|u\|_{L^4_x L^\infty_{yT}}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Por tanto de (3.30)-(3.34) concluimos (3.26). □

Esta sección la finalizamos observando que si u es solución del (PVI) asociada a la ecuación (1.1), tenemos

$$\int_0^T \|\partial_x u(t)\|_{L^\infty_{x,y}} + \|\partial_y u(t)\|_{L^\infty_{x,y}}\, dt < C(s; T; \|u_0\|_{s,2}) \tag{3.35}$$

la cual se deduce de la estimación Strichartz (3.9) del Teorema de existencia (3.2) y de (3.26), despúes de haber aplicado la desigualdad de Hölder (2.12) en la variable temporal t.

□

CAPÍTULO 4

Propagación de regularidad asociada a la ecuación (k-gZK).

En este capítulo se estudia la propagación de regularidad asociada a la ecuacion (1.1), considerandose una propiedad del flujo que genera el (PVI) de la ecuación (k-gZK); este análisis se desarrolla basandose en la estimativa Strichartz (3.9) que forma parte de la norma en el espacio $\mathcal{X}_T$ y la estimativa *a priori* (3.35) estudiada en el capítulo anterior. Mas brevemente el capítulo está focalizado en argumentar el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Si $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 1$ y existen valores $l \in \mathbb{Z}^+$, con $l \geq 1$, y $x_0 \in \mathbb{R}$, tales que*

$$\sum_{|\alpha|=l} \| \partial^\alpha u_0 \|^2_{L^2((x_0,\infty)\times\mathbb{R})} = \sum_{|\alpha|=l} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0}^{\infty} | \partial^\alpha u_0(x,y) |^2 \, dxdy < \infty \tag{4.1}$$

para α multi-indice de orden l, entonces las soluciones dadas por el Teorema (3.2) satisface que para cualquier $\nu \geq 0$ y $\epsilon > 0$

$$\sum_{|\alpha|=j} \sup_{0\leq t\leq T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0+\epsilon-\nu t}^{\infty} (\partial^\alpha u)^2(x,t)dxdy < C \tag{4.2}$$

para $j = 0, 1, ..., l$ con $C = C(l; \| u_0 \|_{1^+,2}; \sum\limits_{|\alpha|=l} \| \partial^\alpha u_0 \|_{L^2((x_0,\infty)\times\mathbb{R})}; \nu; \epsilon; R; T)$
En particular, para todo $t \in (0, T]$, las restricciones de $u(\cdot, t)$ a cualquier semiplano de la forma $(d, \infty) \times \mathbb{R}$ pertenecen a $H^l((d, \infty) \times \mathbb{R})$.
Además para cualquier $\nu \geq 0, \epsilon > 0$ y $R > 0$, u satisface el siguiente efecto regularizante local:

$$\sum_{|\alpha|=l} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0+\epsilon-\nu t}^{R+\epsilon-\nu t} (\partial_x\partial^\alpha u)^2 + (\partial_y\partial^\alpha u)^2 \, dxdy \, dt < C \tag{4.3}$$

con $C = C(l; \| u_0 \|_{1^+,2}; \sum\limits_{|\alpha|=l} \| \partial^\alpha u_0 \|_{L^2((x_0,\infty)\times\mathbb{R})}, \nu, \epsilon, R, T)$.

Para abordar la demostración de este resultado sin perdida de generalidad supondremos que $x_0 = 0$. El siguiente lema nos da una condición suficiente para conseguir el resultado precedente en el lenguaje de las funciones de corte $\chi_{\epsilon,b}$, introducidas en los preliminares.

Lema 4.1. *Dados $\epsilon > 0$ y $b \geq 5\epsilon$ y la familia $\{\chi_{\epsilon,b}\}_{\epsilon>0}$, si para cualquier $\nu \geq 0$ se tiene:*

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} [(\partial_x\partial^\alpha u)^2(x,y,t) + (\partial_y\partial^\alpha u)^2(x,y,t)]\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \leq C, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde α es un multi-índice y C como en el Teorema (4.1), entonces

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{\infty} (\partial^\alpha u)^2\,dxdy \\ &\quad + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{R-\nu t} (\partial_x\partial^\alpha u)^2(x,y,t) + (\partial_y\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\,dxdy\,dt \leq C. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Demostración:
Para $\epsilon > 0$ tenemos por (4.4) que

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(x+\nu t)dxdy \leq C$$

Puesto que $\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon} = 1$ en el intervalo $[\epsilon,\infty)$ y además $\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon} \geq 0$ en $\mathbb{R}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{\infty} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\,dxdy &= \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)1_{[\epsilon,\infty)}(x+\nu t)\,dxdy \\ &\leq \sup_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 \chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(x+\nu t)(x,y,t)dxdy \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Por otro lado, al escoger cualquier $b > R$ y teneniendo en cuenta que:

$$1_{[\epsilon,R]} \leq c\chi'_{\frac{\epsilon}{5},b} \quad \text{ en } \mathbb{R},$$

se sigue de lo anterior

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{R-\nu t} [(\partial_x\partial^\alpha u)^2 + (\partial_y\partial^\alpha u)^2]\,dxdy\,dt \\ &\qquad = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [(\partial_x\partial^\alpha u)^2 + (\partial_y\partial^\alpha u)^2]1_{[\epsilon,b]}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\ &\qquad \leq \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [(\partial_x\partial^\alpha u)^2 + (\partial_y\partial^\alpha u)^2]\chi'_{\frac{\epsilon}{5},b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\ &\qquad \leq C. \end{aligned}$$

□

Nota: La cantidad (4.1) por el Lema (4.1) queda en términos de $\chi_{\epsilon,b}$.
Por la extensión de este trabajo, dividimos el capítulo dependiendo del orden del multi-indice α.

Demostración del Teorema 4.1.

Demostramos este resultado empleando el principio de inducción matemática. La técnica empleada se basa en estudiar estimativas de energía con el peso $\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)$, esto es aplicamos el operador ∂^α a la ecuación (1.1) con α multi-indice entero, multiplicamos por $(\partial^\alpha u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)$ e integramos en las variables espaciales.
Se menciona además que estas acotaciones se realizan sólo para el (PVI) asociado a la ecuación (ZK), pues gracias a la estimativa *apriori* (3.35) del capitulo (3) y el Lema de Sobolev 2.3 la misma idea de demostración funciona para el resto de la familia (k-gZK) para $k \geq 2$ (1.1).

Es necesario para la demostración adaptar una notación según el multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, pues sintetiza extensas fórmulas, por tanto introducimos las siguientes definiciones.

- Por brevedad escribimos
$$[\alpha_1,\alpha_2](t) = [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\partial^\alpha u\right)^2 (x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy.$$

- Denotamos la ganancia de derivada en la variable x en términos de la familia $\chi_{\epsilon,b}$ como
$$[\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b} = [\alpha_1,\alpha_2]_x = \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy,$$
y análogamente con la derivada en la variable y,
$$[\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b} = [\alpha_1,\alpha_2]_y = \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy.$$

Entre otras observaciones, tendremos presente la siguiente identidad: aplicamos formalmente el operador ∂^α para cualquier α multi-indice y multiplicamos por $(\partial^\alpha u)\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)$ a la ecuación (ZK), despúes de realizar integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
0 = &\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial^\alpha u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdydt - \nu\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2}(\partial^\alpha u)^2\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy}_{A_1}\\
&+3\int_{\mathbb{R}^2}((\partial_x(\partial^\alpha u))^2\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdydt + \int_{\mathbb{R}^2}((\partial_y(\partial^\alpha u))^2\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt\\
&-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2}(\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi'''_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy}_{A_2} + \underbrace{2\int_{\mathbb{R}^2}\partial^\alpha(uu_x)(\partial^\alpha u)(x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy}_{A_3}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

4.1. Caso $|\alpha| = 1$.

Este caso inicial tiene una especial propiedad, ya que exhibe el efecto regularizante local, para las soluciones asociadas al problema en consideración, asumiendo claramente que el dato inicial $u_0 \in H^{1^+}(\mathbb{R}^2)$. Si $|\alpha| = 1$, en (4.6) integrando entre 0 y T y empleando la notación $[\alpha_1, \alpha_2]$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_x(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_y(t)\, dt \\
&\leq \left| [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) - \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u_0)^2(x,y)\chi_{\epsilon,b}(x)\, dxdy \right| + \int_0^T 3[\alpha_1,\alpha_2]_x(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_y(t)\, dt \\
&\leq \left| \nu \int_0^T \partial^\alpha [0,0]_{\epsilon,b}(t) dt + c_{\epsilon,b} \int_0^T [0,0]_{\frac{\epsilon}{3},b+\epsilon}(t) dt - 2\int_0^T A_3^\alpha(t)\, dt \right| \\
&\leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{1^+,2}) + C\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $\partial^\alpha[0,0]_{\epsilon,b} = \begin{cases} [0,0]_{x,\epsilon,b} & si \quad \alpha = (1,0) \\ [0,0]_{y,\epsilon,b} & si \quad \alpha = (0,1). \end{cases}$

O resumidamente, conseguimos la siguiente desigualdad:

$$\int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_x(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_y(t)\, dt \leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{1^+,2}) + \int_0^T |A_3^\alpha(t)| dt \quad . \tag{4.8}$$

Estudiamos los casos cuando α sea **(1,0)** ó **(0,1)** teniendo presente (4.8).

Caso (1,0).

De (4.8) resta por estudiar la cantidad $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt$, con $\alpha =$**(1,0)**, empleando integración por partes, la estimación (3.8) y el Lema de Sobolev, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)| dt &= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x(uu_x)\partial_x u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) dxdy \right| dt \\
&= \int_0^T \left| \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u_x^3 \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) dxdy - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\partial_x u)^2 \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t) dxdy \right| dt \\
&\leq \int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty_{x,y}} \int_{\mathbb{R}^2} (u_x)^2 \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt \\
&\quad + C_s ||u||_{L^\infty_T H^{1^+}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (u_x)^2 \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt \\
&\leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{1^+,2}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Con lo que, nuevamente de (4.8), la acotación lograda en (4.9) deducimos para el multiindice **(1,0)**, el siguiente efecto regularizante local :

$$\int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_x(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_y(t)\, dt \leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{1^+,2}). \tag{4.10}$$

Caso (0,1).

Las ideas que desarrollamos en este apartado son totalmente analogas al caso **(1,0)**, salvo que emplearemos la dericada ∂_y. Empleando (3.8) y el Lema de Sobolev, consiguimos:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_y(uu_x)u_y(x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy\right| dt \\ &= \int_0^T \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u_y^2 u_x \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} uu_y^2 \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\right| dt \\ &\leq \int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty_{x,y}} \int_{\mathbb{R}^2} u_y^2 \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dx \\ &\leq C(\epsilon,\nu,T,\|u_0\|_{1^+,2}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

De los casos **(1,0)** y **(0,1)** deducimos:

$$\sum_{|\alpha|=1} \int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t)dt \leq C, \tag{4.12}$$

con $C = C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{1^+,2})$.

Concluyendo de esta manera el caso $|\alpha| = 1$.

4.2. Caso $|\alpha| = 2$

Ahora es el caso para estudiar $|\alpha| = 2$, por lo cual como en el inicio de los casos **(1,0)** y **(0,1)**, se asume como hipótesis general según el valor α que $\|(\partial^\alpha u_0)^2\chi_{\epsilon,b}\|_{L^1} < \infty$ con $|\alpha| = 2$ y para la conclusión sumamos todos estos casos; es decir,

$$\sum_{|\alpha|=2} ||(\partial^\alpha u_0)^2\chi_{\epsilon,b}||_{L^1} < \infty.$$

Teniendo presente la identidad (4.6) y la conclusión (4.12), se obtiene que para $|\alpha| = 2$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) - ||(\partial^\alpha u_0)^2\chi_{\epsilon,b}||_{L^1_{x,y}} \\ &\quad\leq [\alpha_1,\alpha_2] - ||(\partial^\alpha u)^2\chi_{\epsilon,b}||_{L'} + \int_0^T 3[\alpha_1,\alpha_2]_x(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_y(t)dt \\ &\quad\leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{H^s}, ||u_0||_{H^1(\Omega;\chi_{\epsilon,b}\,dxdy)}) + \int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Con lo que comenzamos con el estudio cuando α sea alguno de los casos **(2,0)**, **(1,1)** y finalizamos separadamente con el caso **(0,2)**.

Caso (2,0):

Con $\alpha = (2,0)$, de (4.13) resta por estimar $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt$, veamos

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^2(uu_x)\partial_x^2 u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy \right| dt \\
&= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} 3u_x(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b} + u\partial_x^3 u \partial_x^2 u \chi_{\epsilon,b}\, dxdy \right| dt \\
&= \int_0^T \left| \frac{5}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u_x(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\partial_x^2 u)^2\chi'_{\epsilon,b} \right| dt \\
&\leq C\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty_{x,y}}[2,0]_{\epsilon,b}(t)\, dt + C_s||u||_{L^\infty_T H^s}\int_0^T [1,0]_{x,\epsilon,b} dt
\end{aligned}$$

Habiendo empleado la estimación (3.8), los casos en que $|\alpha| = 1$, el Lema de Sobolev y la desigualdad de Gronwall, concluimos que existe una constante

$$C = C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{H^s},||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_{\epsilon,b}\, dxdy)})$$

tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy \leq C\exp\left(\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty_{x,y}} dt\right) \leq C. \tag{4.14}$$

para cualquier $t \in [0,T]$, teniendo presente (4.13) se consluye para $\alpha = (2,0)$ que:

$$\sup_{[0,T]}[2,0]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [2,0]_x(t) + [2,0]_y(t)dt \leq C. \tag{4.15}$$

donde $C = C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{H^s};||(\partial_x^2 u_0)^2\chi_{\epsilon,b}||_{L^1_{x,y}})$.

Caso (1,1).

Para el multi-indice $\alpha = (1,1)$ tenemos que $\partial^\alpha = \partial_{x,y}$, así si aplicamos integración por partes y las estimativas que usualmente son requeridas, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{xy}(uu_x)\partial_{xy}u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy \right| dt \\
&\leq \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} [uu_{xxy} + 2u_xu_{xy} + u_yu_{xx}]u_{xy}\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy \right| dt \\
&= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{3}{2}u_x(u_{xy})^2\chi_{\epsilon,b} - \frac{1}{2}u(u_{xy})^2\chi'_{\epsilon,b} + u_yu_{xx}u_{xy}\chi_{\epsilon,b}\, dxdy \right| dt \\
&\leq \frac{3}{2}\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty_{x,y}}\int_{\mathbb{R}^2}(u_{xy})^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt + \frac{1}{2}||u||_{L^\infty_T H^s}\int_0^T [1,0]_{y,\epsilon,b}(t)\, dt \\
&+ \sup_{t\in[0,T]}[2,0](t)\int_0^T ||u_y(t)||_{L^\infty} dt + \int_0^T ||u_y(t)||_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(u_{xy})^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt \\
&\leq C + \int_0^T \left(\|u_x(t)\|_{L^\infty_{x,y}} + \|u_y(t)\|_{L^\infty_{x,y}}\right)[1,1]_{\epsilon,b}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

De modo que por (4.15), tenemos que existe una constante

$$C = C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{H^s}; ||(\partial_x^2 u_0)^2||_{H^l(\Omega,\chi\, dxdy)}, ||\partial_{xy} u_0||_{H^l(\Omega,\chi\, dxdy)}),$$

y por la desigualdad de Gronwall (2.10) y (3.35) se sigue

$$\begin{aligned}\sup_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (u_{xy})^2 \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) dxdy &\leq C \exp\left(\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty_x} + ||u_y(t)||_{L^\infty} dt \right) \\ &\leq C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{s,2}; ||u_0||_{H^l(\Omega,\chi_\epsilon\, dxdy)}, l = 1)\end{aligned}$$

Por lo cual de (4.13) y la estimativa reciente tenemos:

$$\sup_{[0,T]} [1,1]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [1,1]_{x,\epsilon,b}(t) + [1,1]_{y,\epsilon,b}(t) dt \leq C, \tag{4.16}$$

donde $C = C = C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{H^s}; ||(\partial_x^2 u_0)^2||_{H^l(\Omega,\chi\, dxdy)}, ||\partial_{xy} u_0||_{H^l(\Omega,\chi\, dxdy)})$.

Caso (0,2).

Para el siguiente caso, **(0,2)**, asumimos ciertos los casos en que $|\alpha| = 1$ y lo que llevamos para el caso $|\alpha| = 2$.

Procederemos a estudiar el caso $\alpha =$**(0,2)**, es decir, $\partial^\alpha = \partial_{yy}$, y por la desigualdad (4.13) bastaría estudiar la componente no lineal de la ecuación (1.1), la cual es $|A_3^\alpha|$, para ello tendremos presente la desigualdad de Young, el Lema de Sobolev así se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_3^\alpha(t)| dt &= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{yy}(uu_x) u_{yy} \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy \right| dt \\ &\leq \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_x (\partial_{yy} u)^2 \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) + 2 u_y \partial_{xy} u \partial_{yy} u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) dxdy \right| dt \\ &\qquad + \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u (\partial_{yy} u)^2 \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t) \right| dt \\ &\leq C \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty}) [0,2]_{\epsilon,b}(t) dt + ||u||_{L^\infty_T H^s} [0,1]_{y,\epsilon,b} \\ &\qquad + \sup_{t\in[0,T]} [1,1]_{\epsilon,b}(t) \int_0^T ||u_y(t)||_{L^\infty} dt.\end{aligned}$$

Como en los casos cuando α es **(2,0)** y **(1,1)** existe una constante C, tal que:

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (u_{yy})^2 (x,t) \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) dxdy \leq C$$

y consecuentemente de (4.13),

$$\sup_{[0,T]} [0,2]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [0,2]_{x,\epsilon,b}(t) + [0,2]_{y,\epsilon,b}(t) dt \leq C \tag{4.17}$$

donde $C = C(\epsilon, \nu; T; ||u_0||_{s,2}; ||u_0||_{H^l(\Omega,\chi\, dxdy)}; l = 1, 2)$.

Por lo cual de (4.15)-(4.17) concluimos:

$$\sup_{[0,T]} \sum_{|\alpha|\leq 2} [\alpha_1, \alpha_2]_{\epsilon,b} + \int_0^T \sum_{|\alpha|\leq 2} [\alpha_1, \alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1, \alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t)dt \leq C, \tag{4.18}$$

con C como antes.

4.3. Caso $|\alpha| = 3$

Para las estimaciones con $|\alpha| = 3$ procedemos como antes, consideramos (4.6) y (4.18), reescribamos para este caso como en (4.13), integramos en la variable temporal t la identidad (4.6) y así conseguimos la siguiente acotación

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) - ||(\partial^\alpha u_0)^2\chi_{\epsilon,b}||_{L^1} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) - ||(\partial^\alpha u_0)^2\chi_{\epsilon,b}||_{L^1} + \int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_x + [\alpha_1,\alpha_2]_y dt \qquad (4.19)\\
&\leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{H^s};||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_{\epsilon,b}dxdy)}; l\leq 2) + \int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Donde hemos empleado los segundos sumandos en (4.12) y (4.18) simultaneamente. Con lo que teniendo en cuenta (4.19) procedamos a estudiar los multi-indices **(3,0), (2,1), (1,2)** y **(0,3)**. Allí veremos que la afimación **(3,0)** se obtiene independientemente e implicará los casos **(2,1)**, **(1,2)** y **(0,3)**.

Caso (3,0).

De (4.19) estudiamos la cantidad $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt$. Empleando integración por partes denotamos por constantes a_i a términos combinatorios y denotamos por c_i a sumandos de dos o más términos combinatorios para $i = 1,\ 2,\ 3$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^3(uu_x)(\partial_x^3 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy\right| dt \\
&= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} [a_1 u_x(\partial_x^3 u) + a_2(\partial_x^2 u)^2 + a_3 u\partial_x^4 u]\partial_x^3 u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy\right| dt \\
&= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} c_1 u_x(\partial_x^3 u)^2\chi_{\epsilon,b} + c_2(\partial_x^2 u)^3\chi'_{\epsilon,b} + c_3 u(\partial_x^3 u)^2\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy\right| dt \\
&\leq |c_1|\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial_x^3 u)^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdt \\
&\quad + |c_3|||u||_{L_T^\infty H^s}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}(\partial_x^3 u)^2\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdt + \int_0^T |A_{31}(t)|\, dt \\
&= |c_1|\int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty_{x,y}}[3,0](t) + |c_2|\|u\|_{L_T^\infty H^s}\int_0^T [2,0]_{x,\epsilon}(t)\, dt \\
&\qquad + \int_0^T |A_{31}(t)|\, dt,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

donde
$$A_{31}(t) := \int_{\mathbb{R}^2} c_2(\partial_x^2 u)^3(x,y,t)\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy.$$
Aplicando la desigualdad de Hölder (2.12), la estimación (2.19) y lo logrado en (4.18) conseguimos:
$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_{31}(t)|dt &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x^2 u|^3 \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)|\partial_x^2 u|\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\,dxdy\,dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^4 (\chi'_{\epsilon,b})^2\,dxdy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 \chi^2_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\,dxdy\right)^{1/2} dt \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} [2,0]^{1/2}_{\frac{\epsilon}{5}}(t) \int_0^T ([1,0]_x(t) + [2,0]_x(t) + [1,1]_x(t))\,dt \\
&\leq C,
\end{aligned} \tag{4.21}$$
así de (4.20) y (4.21) se sigue que
$$\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt \leq C + C\int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{x,y}}[3,0]_{\epsilon,b}(t)\,dt$$
Por lo tanto de (4.18), aplicado a (4.19) tenemos por la desigualdad de Gronwall:
$$\sup_{[0,T]}[3,0]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [3,0]_{x,\epsilon,b}(t) + [3,0]_{y,\epsilon,b}(t)dt \leq C \tag{4.22}$$
donde $C = C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{H^s};||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_{\epsilon,b}\,dxdy)}); l = 1,2, \alpha = (3,0))$.

Caso (2,1).

De (4.19), nuevamente consideramos la cantidad $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt$ con $\alpha =$**(2,1)**, empleando integración por partes, las estimativas (3.35) y el Lema de Sobolev, tenemos que existen unas constantes a_i para $i = 1,\ 2,\ 3$ y 4, tales que:
$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_{xxy}(uu_x)\partial_{xxy}u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy\right| dt \\
&= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} (a_1\partial_{xxy}u\partial_x u + a_2\partial_{xy}u\partial_x^2 u + a_3\partial_y u\partial_x^3 u + a_4 u\partial_x^3\partial_y u)\partial_{xxy}u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy\right| dt \\
&\leq \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} a_1(\partial_{xxy}u)^2\partial_x u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) + a_3\partial_y u(\partial_x^3 u)(\partial_{xxy}u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\
&\quad + \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \left(a_2\partial_{xy}u\partial_x^2 u + a_4 u\partial_x^3\partial_y u\right)\partial_{xxy}u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\right| dt \\
&\leq \int_0^T |A_{31}(t) + A_{33}(t)| + |A_{32}(t) + A_{34}(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Así en particular por (4.22) y la desigualdad de Young:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{31}(t)| + |A_{33}(t)| dt &= \int_0^T (||\partial_x u(t)||_{L^\infty} + ||\partial_y u(t)||_{L^\infty})[2,1](t)dt \\ &\quad + \int_0^T ||\partial_y u(t)||_{L^\infty}[3,0](t)dt \\ &\leq C + \int_0^T (||\partial_x u(t)||_{L^\infty} + ||\partial_y u(t)||_{L^\infty})[2,1]_{\epsilon,b}(t)\, dt.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Ahora empleando (4.16) estudiamos la cantidad $\int_0^T |A_{34}(t)|dt$;

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{34}(t)|\, dt &= \int_0^T |a_4| \left| \int_{\mathbb{R}^2} -\frac{1}{2} u_x (\partial_{xxy} u)^2 \chi_{\epsilon,b} - \frac{1}{2} u (\partial_{xxy} u)^2 \chi'_{\epsilon,b}\, dxdy \right| dt \\ &\leq C \int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty}[2,1]_{\epsilon,b}(t)dt + C||u||_{L^\infty H^s} \int_0^T [1,1]_{x,\epsilon,b}(t)\, dt \\ &\leq C + C\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty}[2,1](t)\, dt.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Con lo que resta estudiar la cantidad $A_{32}(t)$, la cual transformamos en los siguientes sumandos:

$$A_{32}(t) = C\int (\partial_{xy} u)^2 \partial_x^3 u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dt + C\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{xy} u)^2 (\partial_x^2 u) \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t) = A_{321} + A_{321}.$$

La acotación de $|A_{32}(t)|$ se obtiene empleando la estimativa (2.19), consecuentemente:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{321}(t)|\, dt &\leq C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left| (\partial_x \partial_y u)^2 (\partial_x^3 u) \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) \right| \, dxdy\, dt \\ &\leq \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{xy} u)^4 \chi_{\epsilon,b}^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^3 u)^2 \chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(x+\nu t)\, dxdy \right)^{1/2} dt \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} [3,0]^{1/2}_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon} \int_0^T ([1,1]_{\epsilon,b} + [2,1]_{\epsilon,b} + [1,2]_{\epsilon,b} + [0,1]_{x,\epsilon,b})\, dt \\ &\leq C\int_0^T ([1,1]_{\epsilon,b} + [0,1]_{x,\epsilon,b})\, dt + C\int_0^T [2,1]_{\epsilon,b}(t) + [1,2]_{\epsilon,b}(t) dt \\ &\leq C + C\int_0^T [2,1]_{\epsilon,b}(t) + [1,2]_{\epsilon,b}(t)\, dt,\end{aligned} \tag{4.25}$$

se han usado la Proposición (2.11) y las estimaciones (4.12) y (4.16) con lo que de (4.25) motiva a estudiar el caso **(1,2)** y posteriormente sumar dichos casos.
Por otra parte estimemos la cantidad $\int_0^T |A_{322}(t)|\, dt$, empleando nuevamente la desigualdad (2.19), deducimos

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{322}(t)|\, dt &\leq C\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{xy} u)^4 (\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t))^2 dxdy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 (\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(x+\nu t))^2 \right)^{1/2} dt \\ &\leq C \sup_{t\in[0,T]} [2,0]^{1/2}_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon} \left(\int_0^T [0,1]_{x,\epsilon} + [1,1]_{x,\epsilon} + [1,1]_{y,\epsilon} + c_2 [0,1]_{x,\epsilon} dt \right) \\ &\leq C.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Esto implica que $\int_0^T |A_{322}(t)|\,dt \leq C$, puesto que tenemos (4.12) y (4.17), con lo que de (4.23) y (4.26), se sigue

$$[2,1]_{\epsilon,b}(t) - [2,1]_{\epsilon,b}(0) \leq C + \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})\left([2,1]_\epsilon(t) + [1,2]_\epsilon(t)\right)\,dt. \tag{4.27}$$

Caso (1,2).

Puesto que se tiene presente (4.19), basta estimar $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt$ con $\alpha = (1,2)$, para ello consideramos constantes como en el caso anterior a_i, para $i = 1, \cdots, 5$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt &= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x \partial_y^2 (uu_x)(\partial_x\partial_y^2 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \right| dt \\
&\leq \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(a_1 u_x \partial_x \partial_y^2 u + a_4 u_y \partial_y \partial_x^2 u + a_5 u \partial_x^2 \partial_y^2 u\right)(\partial_{xyy}u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \right| dt \\
&\qquad + \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left(a_2 (\partial_{xy}u)^2 + a_3 \partial_x^2 u \partial_y^2 u\right)(\partial_{xyy}u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \right| dt \\
&\leq \int_0^T |A_{31}(t) + A_{34}(t) + A_{35}(t)| + |A_{32}(t) + A_{33}(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Como en (4.23) y (4.24) pero para el caso $\alpha =$**(1,2)** que estamos abordando tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_{31} + A_{34} + A_{35}|(t)dt &\leq C \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})[1,2] + \\
&\quad + C\int_0^T ||u_y(t)||_{L^\infty}[2,1]dt + C\|u\|_{L_T^\infty H^s} \int_0^T [0,2]_{x,\epsilon,b}(t)dt \\
&\leq C + C\int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})\left([1,2]_\epsilon + [2,1]_\epsilon\right)\,dt.
\end{aligned}$$

El integrando en la variable temporal $A_{32}(t) = 0$ para cada $t \in [0,T]$, así nos queda por estudiar $\int_0^T |A_{33}(t)|dt$. Empleando nuevamente integración por partes, se sigue:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_{33}(t)|dt &= C\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} u_{yy} u_{xx} u_{xyy} \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \right| dt \\
&= C\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} -\frac{1}{2} u_{xxx}(u_{yy})^2 \chi_{\epsilon,b} - \frac{1}{2} u_{xx}(u_{yy})^2 \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \right| dt \\
&= \int_0^T |A_{331}(t) + A_{332}(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Ya que $\chi_{\epsilon,b}^{(j)} \leq \chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\chi_{\epsilon,b}$ en $\mathbb{R}$ para $j = 0, 1$, obtenemos de la desigualdad de Hölder (2.12) y (2.19)

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_{331}(t)|dt &\leq \sup_{t\in[0,T]} [3,0]_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}^{1/2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (u_{yy})^4 \chi_{\epsilon,b}^2 dxdy \right)^{1/2} \\
&\leq C\int_0^T [0,2]_{\epsilon,b}(t) + [1,2]_{\epsilon,b}(t) + [0,3]_{\epsilon,b}(t) + [0,1]_{y,\epsilon,b}(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Procedemos a acotar la cantidad $\int_0^T |A_{332}(t)|dt$, de manera análoga tenemos presente (2.12) y (2.19) se sigue:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{332}(t)|dt &\leq \sup_{t\in[0,T]} [2,0]^{1/2}_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (u_{yy})^4 (\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t))^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq C \int_0^T [0,1]_{y,\epsilon}(t) + [1,1]_{y,\epsilon}(t) + [0,2]_{y,\epsilon}(t)\, dt,\end{aligned}$$

y por (4.18) tenemos $\int_0^T |A_{332}(t)|\, dt \leq C$. De la estimación obtenida en (4.28), de forma natural sumamos los multi-indices **(2,1)**, **(1,2)** y **(0,3)**, ya que para este caso $\alpha =$**(1,2)** deduce:

$$\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt \leq C + \int_0^T (C + ||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty}) \left([2,1]_{\epsilon,b} + [1,2]_{\epsilon,b} + [0,3]_{\epsilon,b}\right) dt. \tag{4.29}$$

Caso (0,3).

En cuanto al término no lineal para $\alpha =$**(0,3)**, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_y^3(uu_x)\partial_y^3 u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy \right| dt \\ &\leq \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left[u_x\partial_y^3 u + 3\partial_y^2 u \partial_{xy} u + 3u_y u_{xyy} + u\partial_y^3\partial_x u\right] (\partial_y^3 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy \right| dt \\ &= \int_0^T |A_{31}(t) + A_{32}(t) + A_{33}(t) + A_{34}(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Como en (4.23) y en (4.24) tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{31}(t) + A_{33}(t) + A_{34}(t)|\, dt &\leq C \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty}) \left([0,3](t) + [1,2](t)\right)\, dt \\ &\quad + C \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left|u(\partial_y^3 u)^2 \chi'(x+\nu t)\right| dxdy\, dt \\ &\leq C \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})([0,3]_\epsilon(t) + [1,2]_\epsilon)(t)\, dt \\ &\quad + C||u||_{L_T^\infty H^s} \int_0^T [0,2]_{y,\epsilon,b}(t)\, dt \\ &\leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{H^l(\Omega,\chi\, dxdy)}, l=1,2) \\ &\quad + C\int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})([0,3]+[1,2])dt,\end{aligned} \tag{4.30}$$

donde hemos aplicado (4.17) para obtener (4.30). Por último se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{32}(t)|\, dt &= \int_0^T \left| -\frac{a_1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{xyy} u)(\partial_y^2 u)^2 \chi dxdy \right| dt \\ &\leq \int_0^T \frac{a_1}{6} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^2 u)^2 \chi'(x+\nu t) |\partial_y^2 u| \chi_{\frac{\epsilon}{5}}(x+\nu t)\, dxdy\, dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^2 u)^4 (\chi_\epsilon'(x+\nu t))^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^2 u)^2 \chi_{\frac{\epsilon}{5}}(x+\nu t) \right)^{1/2} dt \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} [0,2]_{\frac{\epsilon}{5}}^{1/2} \int_0^T ([0,1]_{y,\epsilon} + [1,1]_{y,\epsilon} + [0,2]_{y,\epsilon})\, dt \\
&\leq C.
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Y así de (4.15), (4.17) y lo logrado en (4.30) y (4.31), se tiene finalmente

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)| dt \leq C(\epsilon; \nu; ||u_0||_{H^s}; ||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_\epsilon dxdy)}; l = 1,2, \alpha = (3,0)) \\
+ \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})([1,2](t) + [0,3](t))\, dt.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Con lo que reuniendo las conclusiones de los casos $\tilde{\alpha} =$**(2,1),(1,2)** y **(0,3)**, es decir, (4.27), (4.29), (4.32) y la desigualdad de Gronwall obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \sum_{\tilde{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,t) \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) dxdy \\
&\quad\leq C(\epsilon; \nu; ||u_0||_s; ||u_0||_{H^l(\Omega;\chi dxdy)}, l = 1,2; T) \exp\left(\int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty}) dt \right) \\
&\quad\leq C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{s,2}; ||u_0||_{H^l(\Omega;\chi\, dxdy)}; l = 1,2,3),
\end{aligned}
$$

y por (4.19) y (4.22) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \sum_{|\alpha|\leq 3} [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) + \sum_{|\alpha|\leq 3} \int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t) dt \\
\leq C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{s,2}; ||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_\epsilon dxdy)}; l = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

4.4. Caso $|\alpha| = 4$.

Procedemos ahora a estimar $|\alpha| = 4$ de la forma usual como hemos empleado, consideramos (4.6), con $|\alpha| = 4$ y suponiendo la afirmación (4.33), tenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t) \chi_{\epsilon,b}\, dxdy - \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u_0)^2(x,y) \chi_{\epsilon,b}(x)\, dxdy \\
&\qquad\leq \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t) \chi_{\epsilon,b} dxdy - ||(\partial^\alpha u_0)^2 \chi_{\epsilon,b}||_{L^1} \\
&\qquad\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} [(\partial_x \partial^\alpha u)^2 + (\partial_y \partial^\alpha u)^2] \chi_{\epsilon,b}'(x+\nu t)\, dxdy\, dt \\
&\qquad\leq C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{s,2}; ||u_0||_{H^l(\Omega;\chi\, dxdy)}; l = 1,2,3) + \int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt.
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

Por tanto de (4.34) deducimos que resta estimar la cantidad $\int_0^T |A_3^\alpha(t)| dt$ que hemos venido denominando término no lineal, dependiendo del caso α a tratar.

Caso (4,0).

Para este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^4(uu_x)\partial_x^4 u\chi_\epsilon(x+\nu t)\, dxdy \right| dt \\
&\leq \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left[a_1 u_x\partial_x^4 u + a_2\partial_x^2 u\partial_x^3 u + a_3 u\partial_x^5 u\right] \partial_x^4 u\chi_\epsilon\, dxdy \right| dt \\
&= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} c_1 u_x(\partial_x^4 u)^2\chi + c_2 u(\partial_x^4 u)^2\chi' + c_3\partial_x^2 u\partial_x^3 u\partial_x^4 u\chi_\epsilon\, dxdy \right| dt \\
&\leq C\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty}[4,0]_\epsilon(t)\, dt + C||u||_{L^\infty_T H^s}\int_0^T [3,0]_{x,\epsilon,b}(t)\, dt \\
&\quad + C\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^2 u\partial_x^3 u\partial_x^4 u\chi_\epsilon dxdy \right| dt.
\end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt &\leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{s,2};||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_\epsilon\, dxdy)}; l\leq 3) \\
&\quad + C\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty}[4,0]_{\epsilon,b}(t)dt + \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^2 u\partial_x^3 u\partial_x^4 u\chi_\epsilon\, dxdy \right| dt.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Basta estudiar el tercer sumando de la precedente desigualdad (4.35). Aplicamos la desigualdad de Young se sigue que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^2 u\partial_x^3 u\partial_x^4 u\chi_{\epsilon,b}\, dxdy \right| dt \\
&\quad\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[\partial_x^2 u\partial_x^3 u\right]^2 \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxd\, dt + \int_0^T [4,0](t)dt \\
&\quad= \int_0^T \left(A_{31}(t) + A_{32}(t)\right)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

El término A_{32} es acotado *a posteriori* empleando la desigualdad de Gronwall. Respecto al sumando A_{31} se procede a integrar por partes, la Proposición (2.11), la desigualdad de Young y la desigualdad de Gagliardo-Niremberg (2.14), obteniendo entonces:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} [\partial_x^2 u\partial_x^3 u]^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt \\
&\quad= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} a_1(\partial_x^2 u)^3(\partial_x^4 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} a_2(\partial_x^2 u)^3(\partial_x^3 u)\chi_\epsilon'\, dxdy\, dt \\
&\quad\leq C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^6(\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon})^6\, dxdy + C\int_0^T [4,0]_\epsilon(t)\, dt + C\int_0^T [2,0]_{x,\epsilon,b}(t)\, dt \\
&\quad\leq C + C\int_0^T [4,0]_\epsilon(t)\, dt \\
&\quad+ C\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x^2 u)\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\right]^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^3 u)^2(\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon})^2 + (\partial_x^2 u)^2(\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}')^2 + (\partial_y\partial_x^2 u)^2(\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon})^2\right)^2 dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C + C\int_0^T [4,0]_\epsilon(t)\,dt + C\sup_{t\in[0,T]}[2,0]_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\int_0^T [3,0]^2_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t) + [1,0]^2_{x,\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t) + [2,1]^2_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t)\,dt \\
&\leq C \ + C\int_0^T [4,0]_\epsilon(t)\,dt + C\int_0^T [1,0]^2_{x,\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Estudiemos con detalle el sumando $\int_0^T [1,0]^2_{x,\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t)\,dt$, para ello, tendremos presente la propiedad $\chi'_\epsilon \leq c\chi_{\frac{\epsilon}{5}}$ en $\mathbb{R}$, lo cual implica

$$
\begin{aligned}
\int_0^T [1,0]^2_{x,\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t)\,dt &:= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 \chi'_{\frac{\epsilon}{5}}(x+\nu t)\,dxdy\right)^2 dt \\
&\leq C\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 \chi'_{\frac{\epsilon}{5}}(x+\nu t)\cdot \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 \chi_{\frac{\epsilon}{25}}(x+\nu t)\right) dt \\
&\leq C\sup_{t\in[0,T]}[2,0]_{\frac{\epsilon}{25},\frac{\epsilon}{5}}(t)\int_0^T [1,0]_{x,\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t)\,dt \\
&\leq C.
\end{aligned}
$$

Con la estimación (4.34) deducimos:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}[4,0]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [4,0]_{x,\epsilon,b} + [4,0]_{y,\epsilon,b}(t)\,dt \\
&\qquad \leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{s,2};||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_{\epsilon,b}dx)};l=1,2,3;\alpha=(4,0)).
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

Ahora consideramos los casos **(3,1), (2,2), (1,3)** para estimarlos simultaneamente, como hicimos en los casos **(2,1),(1,2)** y **(0,3)**.

Caso (3,1):

Por (4.34) estimemos para $\alpha =$**(3,1)**, el término no lineal:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt &\leq \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2}\left[a_1 u_x\partial_x^3\partial_y u + a_4 u_y\partial_x^4 u + a_5 u\partial_x^4\partial_y u\right](\partial_x^3\partial_y u)\chi_{\epsilon,b}\,dxdy\right| dt \\
&\quad + \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2}\left[a_2(\partial_x^2\partial_y u)(\partial_x^2 u) + a_3(\partial_x^3 u)(\partial_{xy}u)\right](\partial_x^3\partial_y u)\chi_{\epsilon,b}\right| dt \\
&= \int_0^T |A_{31}(t) + A_{34}(t) + A_{35}(t)| + |A_{32}(t) + A_{33}(t)|\,dt.
\end{aligned}
$$

Procedemos como en (4.30) e integramos por partes para los sumandos A_{31}, A_{34} y A_{35}, tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |A_{31}(t) + A_{34}(t) + A_{35}(t)|\,dt \\
&\qquad \leq C\int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})[3,1]_{\epsilon,b} + \int_0^T ||u_y(t)||_{L^\infty}[4,0]_{\epsilon,b}(t)dt \\
&\qquad\qquad + ||u||_{L^\infty_T H^s}\int_0^T [2,1]_{x,\epsilon,b}(t)dt
\end{aligned}
$$

Así de (4.33) y de (4.37) se concluye

$$\int_0^T |A_{31}(t) + A_{34}(t) + A_{35}(t)|\, dt \le C + \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty})[3,1]_{\epsilon,b}(t)\, dt.$$

donde

$$C = C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{s,2}; ||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_{\epsilon,b}dxdy)}; l = 1,2,3; \alpha = (4,0)).$$

Para estimar las cantidades: $\int_0^T |A_{32} + A_{33}|(t)\, dt$; utilizamos la desigualdad de Young, (2.19) y la Proposición 2.11, para obtener

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |A_{32} + A_{33}|(t) dt \\
&\le |a_2| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[\partial_x^2 \partial_y u \partial_x^2 u\right]^2 \chi_\epsilon(x+\nu t)\, dxdy\, dt \\
&\quad + |a_3| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[\partial_x^3 u \partial_{xy} u\right]^2 \chi_\epsilon(x+\nu t) + C[3,1]_\epsilon(t)\, dt \\
&\le C \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 \partial_y u)^4 \chi_\epsilon^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^4 \chi_{\frac{\epsilon}{5}}^2\right)^{1/2} dt + \int_0^T C[3,1]_\epsilon(t)\, dt \\
&\quad + C \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^3 u)^4 \chi_\epsilon^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{xy} u)^4 \chi_{\frac{\epsilon}{5}}^2\right)^{1/2} dt \\
&\le C \int_0^T ([2,1] + [3,1] + [2,2] + [1,1]_x)_\epsilon ([2,0] + [3,0] + [2,1] + [1,0]_x)_{\frac{\epsilon}{5}}\, dt \\
&+ C \int_0^T ([3,0] + [4,0] + [3,1] + [2,0]_x)_\epsilon ([1,1] + [2,1] + [1,2] + [0,1]_x)_{\frac{\epsilon}{5}}\, dt \\
&\le C(\epsilon; \nu; T; ||u_0||_{s,2}; ||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_{\epsilon,b}dxdy)}; \alpha = (4,0)) + C \int_0^T [3,1]_\epsilon(t) + [2,2]_\epsilon(t)\, dt,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

lo cual implica de (4.38)

$$\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt \le C + C \int_0^T [3,1]_\epsilon(t) + [2,2]_\epsilon(t)\, dt \tag{4.39}$$

donde hemos utilizado la estimativa (4.33).

Caso(2,2).

Procediendo análogamente como en el caso **(3,1)** obtenemos para $\alpha =$**(2,2)**,

$$\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt &\le \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left[a_1 u_x \partial_x^2 \partial_y^2 u + a_5 u_y \partial_x^3 \partial_y u + a_6 u \partial_x^3 \partial_y^2 u\right] (\partial_x^2 \partial_y^2 u) \chi_\epsilon \right| dt \\
&+ \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left[a_2 \partial_x^2 \partial_y u \partial_{xy} u + a_3 \partial_x^2 u \partial_x \partial_y^2 u + a_4 \partial_y^2 u \partial_x^3 u\right] (\partial_x^2 \partial_y^2 u) \chi_\epsilon \right| dt \\
&\le \int_0^T |A_{31}(t) + A_{35}(t) + A_{36}(t)|\, dt + \int_0^T |A_{32}(t) + A_{33}(t) + A_{34}(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Es decir, dividimos la cantidad $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt$ en dos sumandos el primero posee factores $\partial^\beta u$ con $|\ \beta\ |\leq 1$ y el otro tiene factores con derivadas de mayor orden, luego

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{31}(t)+A_{35}(t)+A_{36}(t)|\,dt \leq \int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty}+||u_y(t)||_{L^\infty})[2,2]_{\epsilon,b}(t)+\\ +\int_0^T ||u_x(t)||_{L^\infty}[3,1]_{\epsilon,b}(t)\,dt+||u||_{L_T^\infty H^s}\int_0^T [1,2]_{x,\epsilon,b}(t)dt\end{aligned} \tag{4.40}$$

Así resta por estudiar los terminos $A_{32}(t)$,$A_{33}(t)$ y $A_{34}(t)$, veamos:

$$\begin{aligned}\int_0^T A_{32}(t)+A_{33}(t)+A_{34}(t)\,dt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left(a_2\partial_x^2\partial_y u\partial_x\partial_y u + a_3\partial_x\partial_y^2 u\partial_x^2 u\right)\left(\partial_x^2\partial_y^2 u\chi_{\epsilon,b}\right)\,dxdy\,dt\\ +\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} a_4\partial_y^2 u\partial_x^3 u\partial_x^2\partial_y^2 u\chi_{\epsilon,b}\,dxdy\,dt.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.19), se sigue que

$$\begin{aligned}&\int_0^T |A_{32}+A_{33}+A_{34}|(t)dt \leq C\int_0^T [2,2]_\epsilon(t)\,dt\\ &+\int_0^T ([2,1]+[3,1]+[2,2]+[1,1]_{x,\epsilon,b})_{\epsilon,b}([1,1]+[2,1]+[1,2]+[0,1]_x)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\,dt\\ &+\int_0^T ([1,2]+[2,2]+[1,3]+[0,2]_{x,\epsilon,b})_{\epsilon,b}([2,0]+[3,0]+[2,1]+[1,0]_x)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\,dt\\ &+\int_0^T ([3,0]+[4,0]+[3,1]+[2,0]_x)_{\epsilon,b}([0,2]+[1,2]+[0,3]+[0,1]_y)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\,dt\\ &\leq C(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{s,2};||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_{\epsilon,b}dxdy)};\alpha=(4,0))+C\int_0^T [3,1]+[2,2]+[1,3]\,dt.\end{aligned} \tag{4.41}$$

Por lo cual reuniendo (4.40) y (4.41), obtenemos:

$$\int_0^T |A_3^\alpha(t)|dt \leq C+\int_0^T (C+||u_x(t)||_{L^\infty}+||u_y(t)||_{L^\infty})([3,1]+[2,2]+[1,3])dt. \tag{4.42}$$

Ahora estudiemos este último caso **(1,3)**, para cerrar las estimativas dadas en los casos ya analizados **(3,1)** y **(2,2)** en (4.39) y en (4.42) respectivamente.

Caso (1,3):

Estimemos la parte no lineal es decir el sumando correspondiente al integrando $|A_3^\alpha(t)|$.

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt &= \int_0^T\left|\int_{\mathbb{R}^2}\partial_x\partial_y^3(uu_x)(\partial_x\partial_y^3 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy\right|dt\\ &=\int_0^T\left|\int_{\mathbb{R}^2}\left[a_1\partial_x\partial_y^3 uu_x+a_5u_y\partial_x^2\partial_y^2 u+u\partial_x^2\partial_y^3 u\right]\partial_x\partial_y^3 u\chi_\epsilon\,dxdy\right|dt\\ &+\int_0^T\left|\int_{\mathbb{R}^2}\left[a_2\partial_y^3 u\partial_x^2 u+a_3\partial_x\partial_y^2 u\partial_{xy}u+a_4\partial_y^2 u\partial_x^2\partial_y u\right]\partial_x\partial_y^3 u\chi_\epsilon\right|dt\\ &=\int_0^T |A_{31}(t)+A_{35}(t)A_{36}(t)|\,dt+\int_0^T |A_{32}(t)+A_{33}(t)+A_{34}(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Como antes, empleando (3.35) y el Lema de Sobolev tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{31}+A_{34}+A_{36}|\,dt &\le C\int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty}+||u_y(t)||_{L^\infty})[1,3]\,dt\\ &\quad + C\int_0^T ||u_y(t)||_{L^\infty}[2,2]dt + C||u||_{L^\infty_T H^s}\int_0^T [0,3]_x(t)dt.\end{aligned} \tag{4.43}$$

Ahora consideramos los integrandos asociados a la cantidad $|A_{33}(t)+A_{34}(t)|$, se tiene que

$$\begin{aligned}&\int_0^T |A_{33}(t)+A_{34}(t)|\,dt \le C\int_0^T [1,3]_\epsilon(t)\,dt\\ &\quad + C\int_0^T ([1,2]+[2,2]+[1,3]+[0,2]_x)_{\epsilon,b}([1,1]+[2,1]+[1,2]+[0,1]_x)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\,dt\\ &\quad + C\int_0^T ([2,1]+[3,1]+[2,2]+[1,1]_x)_{\epsilon,b}([0,2]+[1,2]+[0,3]+[0,1]_y)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\,dt\\ &\quad \le C + C\int_0^T ([3,1]+[2,2]+[1,3])_{\epsilon,b}(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4.44}$$

Por último consideramos el sumando $|A_{32}(t)|$. Aplicando la desigualdad de Young, obtenemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^T |A_{32}(t)|\,dt = C\int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_y^3 u\partial_x^2 u\partial_x\partial_y^3 u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right|\,dt\\ &\quad \le C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^3 u)^2(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) + \int_0^T [1,3]_{\epsilon,b}(t)\,dt\\ &\quad \le C\int_0^T ||(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}[0,3]_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}(t)\,dt + C\int_0^T [1,3]_{\epsilon,b}(t)\,dt\\ &\quad \le C\sup_{t\in[0,T]}[0,3]_{\frac{\epsilon}{5}}(t)\int_0^T ||(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\,dt + C\int_0^T [1,3]_{\epsilon,b}(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4.45}$$

Con lo que resta estimar $\int_0^T ||(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)||_{L^\infty}\,dt$ teniendo presente las estimaciones en $|\alpha|\le 3$ es decir en (4.33) y el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos

$$||(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)||_{L^\infty} \le ||\partial_{xy}\left[(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)\right]||_{L^1_{x,y}}. \tag{4.46}$$

Por la regla de Leibniz obtenemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^T ||\partial_{xy}\left[(\partial_x^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}\right]||_{L^1_{x,y}}\,dt\\ &\le \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left|2\partial_x^2\partial_y u\partial_x^3 u\chi_\epsilon + 2\partial_x^2 u\partial_x^3\partial_y u\chi_\epsilon\right|\,dxdy + \int_{\mathbb{R}^2}\left|2\partial_x^2 u\partial_x^2\partial_y u\chi_\epsilon'\right|\,dxdy\,dt\\ &\le C\int_0^T ([2,1]+[3,0]+[2,0]+[3,1])_\epsilon\,dt + C\int_0^T [1,0]_{x,\frac{\epsilon}{5}}+[1,1]_{x,\frac{\epsilon}{5}}(t)\,dt\\ &\le C + C\int_0^T [3,1]_{\epsilon,b}(t)\,dt,\end{aligned} \tag{4.47}$$

de las estimativas (4.43)-(4.47) concluimos para $\alpha =$**(1,3)** que

$$\begin{aligned}&\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt \\ &\leq C + C\int_0^T (||u_x||_{L^\infty} + ||u_y||_{L^\infty} + C)([3,1]_{\epsilon,b}(t) + [2,2]_{\epsilon,b}(t) + [1,3]_{\epsilon,b}(t))\,dt.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Así de (4.34),(4.38),(4.42) y (4.48), es decir los casos **(3,1), (2,2)** y **(1,3)** respectivamente tenemos

$$\begin{aligned}([3,1] + [2,2]+&[1,3])_{\epsilon,b}(t) - ([3,1] + [2,2] + [1,3])_{\epsilon,b}(0)dt \\ &\leq C + C\int_0^T (||u_x(t)||_{L^\infty} + ||u_y(t)||_{L^\infty} + C)([3,1] + [2,2] + [1,3])(t)dt\end{aligned}$$

Luego empleando la desigualdad de Gronwall se sigue que

$$\sup_{t\in[0,T]} ([3,1]_{\epsilon,b}(t) + [2,2]_{\epsilon,b}(t) + [1,3]_{\epsilon,b}(t)) \leq C\exp\left(\int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty}\,dt\right)$$

y junto con (4.34) para los α's que estamos considernado, deducimos que

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]} ([3,1]_\epsilon(t) + [2,2]_\epsilon(t) + [1,3]_\epsilon(t)) + \\ &+ \int_0^T ([3,1] + [2,2] + [1,3])_{x,\epsilon}(t)\,dt + \int_0^T ([3,1] + [2,2] + [1,3])_{y,\epsilon}(t)\,dt \\ &\leq C\left(\epsilon;\nu;T;||u_0||_{s,2};||u_0||_{H^l(\Omega;\chi_\epsilon\,dxdy)}; l = 1,2,3; \alpha = (4,0),(3,1),(2,2),(1,3)\right) \\ &= C.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Con lo que por separado a los casos **(4,0), (3,1), (2,2)** y **(1,3)** estudiamos el caso **(0,4)**, para el cual suponemos las anteriores estimaciones, especialmente (4.49).

Caso (0,4).

En este caso $\alpha = (0,4)$ con la misma técnica empleada en los últimos multi-índices tenemos la cantidad asociada al término no lineal de la ecuación (1.1) que

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt &= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_y^4(uu_x)(\partial_y^4 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right|\,dt \\ &\leq \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \left(a_1\partial_y^4 u\partial_x u + a_2\partial_y^3 u\partial_{xy}u\right)(\partial_y^4 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right|\,dt \\ &+ \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} a_3\partial_y^2 u\partial_x\partial_y^2 u\partial_y^4 u\chi_{\epsilon,b}(x+vt)\,dxdy\right|\,dt \\ &+ \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \left(a_4\partial_x\partial_y^3 u\partial_y u + a_5 u\partial_x\partial_y^4 u\right)(\partial_y^4 u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right|\,dt \\ &\leq \int_0^T |A_{31}(t)| + |A_{35}(t)| + |A_{32}(t)| + |A_{33}(t)| + |A_{34}(t)|\,dt.\end{aligned}$$

Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |A_{31}(t)| + |A_{35}(t)| + |A_{34}(t)|\, dt \\
&\leq \int_0^T (\|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty})\, [0,4]_\epsilon\, dt + \int_0^T \|u_y(t)\|_{L^\infty} [1,3]_\epsilon\, dt + \|u\|_{L^\infty_T H^s} \int_0^T [0,3]_\epsilon\, dt.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Por otro lado, aplicamos nuevamente la desigualdad de Young, (2.19) tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |A_{32}(t)| + |A_{33}(t)|\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left((\partial_{xy}u)^2(\partial_y^3 u)^2 + (\partial_y^2 u)^2(\partial_x\partial_y^2 u)^2\right) \chi_\epsilon\, dxdy + [0,4]_\epsilon\, dt \\
&\leq \int_0^T \|(\partial_{xy}u)^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)\|_{L^\infty} [0,3]_{\frac{\epsilon}{5}}(t)\, dt + \int_0^T \|(\partial_y^2 u)^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)\|_{L^\infty} [1,2]_{\frac{\epsilon}{5}}(t)\, dt \\
&+ \int_0^T [0,4]_\epsilon(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Puesto que $\sup\limits_{t\in[0,T]} [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) \leq C$, para $|\alpha| \leq 3$ por (4.33) y empleando la misma técnica empleada en (4.46) y en (4.47), tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|(\partial_{xy}u(t))^2\chi_\epsilon(x+\nu t)\|_{L^\infty}\, dt \leq \int_0^T \|\partial_{xy}\left((\partial_{xy}u(t))^2\chi_{\frac{\epsilon}{5}}(x+\nu t)\right)\|_{L^1}\, dt \\
&\lesssim \int_0^T \|(\partial_x^2\partial_y u)(\partial_y^2\partial_x u)\chi_\epsilon\|_{L^1} + \|(\partial_{xy}u)(\partial_y^2\partial_x^2 u)\chi_\epsilon\|_{L^1} + \|(\partial_{xy}u)(\partial_x\partial_y^2 u)\chi_\epsilon'\|_{L^1}\, dt \\
&\leq \int_0^T ([2,1]_\epsilon(t) + [1,2]_\epsilon(t) + [1,1]_\epsilon(t) + [2,2]_\epsilon(t))\, dt \\
&\qquad + \int_0^T ([0,1]_{x,\epsilon}(t) + [0,2]_{x,\epsilon}(t))\, dt \\
&\leq C + \int_0^T [2,2]_{\epsilon,b}(t)\, dt \\
&\leq C,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

donde la última desigualdad se sigue de (4.49).
Razonando de manera análoga tenemos que

$$\|(\partial_y^2 u(t))^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)\|_{L^\infty} \leq C + \int_0^T [1,3]_{\epsilon,b}(t)\, dt \leq C. \tag{4.53}$$

Así que por (4.47), (4.52) y (4.53) tenemos que si $|\alpha| = 2$ en general conseguimos

$$\|(\partial^\alpha u(t))^2\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)\|_{L^\infty} \leq C + \int_0^T [\alpha_1+1,\alpha_2+1]_{\epsilon,b}(t)\, dt \leq C, \tag{4.54}$$

la cual es una estimativa que emplearemos de ahora en adelante.
Retomando a nuestra estimación de $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt$, hemos conseguido junto con (4.50) y (4.51):

$$\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt \leq C + C\int_0^T \left(\|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty}\right)[0,4]_{\epsilon,b}(t)\,dt, \tag{4.55}$$

Con lo que de (4.34), (4.55) y la desigualdad de Gronwall se deduce que:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} [0,4]_{\epsilon,b}(t) &\leq C\exp\int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty}\,dt\\ &\leq C(\epsilon;\nu;T;\|u_0\|_{s,2};\|u_0\|_{H^l(\Omega\ ;\ \chi_{\epsilon,b}\,dxdy)};l=1,2,3,4).\end{aligned}$$

Y nuevamente de (4.34) tenemos:

$$\sup_{t\in[0,T]} [0,4]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [0,4]_{x,\epsilon,b}(t) + [0,4]_{y,\epsilon,b}(t)\,dt \leq C, \tag{4.56}$$

donde $C = C(\epsilon;\nu;T;\|u_0\|_{s,2};\|u_0\|_{H^l(\Omega\ ;\ \chi_{\epsilon,b}\,dxdy)};|l|\leq 4)$.

Por lo cual podemos concluir de (4.33) y todas las estimaciones efectuadas para $|\alpha| = 4$, que

$$\sum_{|\alpha|\leq 4}\sup_{t\in[0,T]} [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) + \sum_{|\alpha|\leq 4}\int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t)\,dt \leq C, \tag{4.57}$$

donde $C = C(\epsilon;\nu;T;\|u_0\|_{s,2};\|u_0\|_{H^l(\Omega\ ;\ \chi_{\epsilon,b}\,dxdy)};|l|\leq 4)$.

4.5. Paso inductivo.

Probaremos ahora el caso en que $|\alpha| = n \geq 5$ suponiendo por supuesto todos los casos $|\alpha| \leq 4 \leq n-1$. Más precisamente suponemos que:
Si $u_0 \in H^{1^+}(\mathbb{R}^2)$ y $\partial^\beta u_0 \in L^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$, para cualquier β multi-indice con $|\beta| = n-1$ entonces:

$$\sum_{|\alpha|\leq n-1}\sup_{t\in[0,T]} [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) + \sum_{|\alpha|\leq n-1}\int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t)\,dt \leq C, \tag{4.58}$$

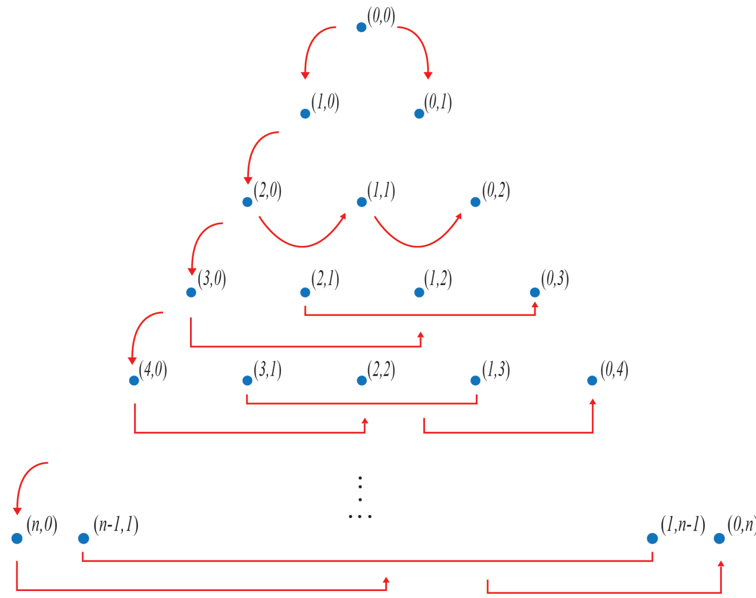
donde $C = C(\epsilon;\nu;T;\|u_0\|_{s,2};\|u_0\|_{H^l(\Omega\ ;\ \chi_{\epsilon,b}\,dx)};|l|\leq n-1)$, para $\epsilon > 0,\ b \geq 5\epsilon$ y $\nu \geq 0$.
Y suponemos también la hipótesis general del Teorema 4.1

$$u_0 \in H^n\left((0,\infty)\times\mathbb{R}\right). \tag{4.59}$$

Pero por el Lema 4.1, podemos asumir que:

$$u_0 \in H^n\left((0,\infty)\times\mathbb{R}\ ;\ \chi_{\epsilon,b}(\cdot)\,dx\right). \tag{4.60}$$

Notamos que los casos con $|\alpha| \geq 5$ son más sencillos de obtener empleando las técnicas ya desarrolladas para los multi-indices $|\alpha| \leq 4$. Por consiguiente el argumento que se emplea de aquí en adelante, consiste en verificar inicialmente el caso $\alpha = (n, 0)$, el cual implicará los casos $\alpha = (n-1, 1), \cdots (1, n-1)$ empleando la misma idea de los casos en que $|\alpha| = 3, 4$, sumarlos y luego separadamente con lo obtenido en los casos anteriores se verifica finalmente el caso $(0, n)$.
El siguiente diagrama ilustra el método de demostración que hemos abordado y el que emplearemos en la inducción.



- *Los puntos azules denotan las afirmaciones* (α_1, α_2).
- *Las direcciones en color rojo significan implicación.*

Figura 4.1: Método empleado en la demostración del Teorema (4.1).

Recordemos que de (4.6) y razonando como en (4.7) para $|\alpha| = n$, integramos en la variable tiempo t y obtenemos:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)dxdy - \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u_0)^2(x,y)\chi_{\epsilon,b}(x)dxdy \\ &\qquad \leq [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) - \|(\partial^\alpha u_0)^2\chi_{\epsilon,b}\|_{L^1} + \int_0^T 3[\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t)\, dt \\ &\qquad \leq C(\epsilon; \|u_0\|_{H^l(\Omega\ ;\ \chi_{\epsilon,b}\, dxdy)}; |l| \leq n-1) + \int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt \end{aligned} \tag{4.61}$$

Caso (n,0).

Estudiemos inicialmente el caso **(n,0)** como en el caso **(4,0)**, esto es, aplicamos integración por partes y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt &= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^n(uu_x)(\partial_x^n u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\
&= \int_0^T \left|\sum_{j=0}^{n} c_j \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^j u \partial_x^{n+1-j} u \partial_x^n u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\
&\leq \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} c_0 u \partial_x^n u \chi'_{\epsilon,b} + c_{1,n} u_x (\partial_x^n u)^2 \chi_{\epsilon,b} + c_{2,n}\partial_x^2 u \partial_x^{n-1} u \partial_x^n u \chi_{\epsilon,b}\right| dt \\
&+ \int_0^T \left|\sum_{j=3}^{n} c_j \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x^j u \partial_x^{n+1-j} u \partial_x^n u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\right| dt \\
&\leq \int_0^T \sum_{j=0}^{n-2} |A_{3,j}(t)|\ dt.
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

Luego por (4.58) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |A_{30}(t)| + |A_{31}(t)|\,dt &\leq \int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty}[n,0](t)\,dt + \|u\|_{L_T^\infty H^s}\int_0^T [n-1,0]_{x,\epsilon,b}(t)\,dt \\
&\leq C + C\int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty}[n,0]_{\epsilon,b}(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{4.63}
$$

Ahora estudiemos la cantidad $A_{32}(t)$ teniendo:

$$
\int_0^T |A_{32}(t)|\,dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2(\partial_x^{n-1}u)^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt + \int_0^T [n,0]_\epsilon(t)\,dt.
$$

Basta entonces estimar el primer término de la desigualdad anterior,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2(\partial_x^{n-1}u)^2\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\
&\qquad = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (-2)\partial_x^2 u \partial_x^3 u \partial_x^{n-1} u \partial_x^{n-2} u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\
&\qquad + \int_0^T - \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 \partial_x^n u \partial_x^{n-2} u \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\
&\qquad + \int_0^T - \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^2 u)^2 \partial_x^{n-1} u \partial_x^{n-2} u \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\
&\qquad \leq \int_0^T |A_{321}(t)| + |A_{322}(t)| + |A_{323}(t)|\,dt
\end{aligned}
$$

Así que acotamos cada uno de las cantidades $\int_0^T |A_{32i}(t)|\,dt$ para $i = 1, 2, 3$,

- En cuanto a la cantidad asociada a $i = 1$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |A_{321}(t)|\,dt &\leq \int_0^T \|(\partial_x^2 u)^2 \chi_{\frac{\epsilon}{5}}(\cdot + \nu t)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x^3 u)^2 (\partial_x^{n-2} u)^2 \chi_\epsilon\,dxdydt \\
&+ \int_0^T [n-1,0]_\epsilon(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Pero por (4.54), la desigualdad (2.19) y la hipótesis de inducción (4.58) se sigue que:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{321}(t)|\,dt &\leq \int_0^T ([3,0]+[4,0]+[3,1]+[2,0]_x)_{\frac{\epsilon}{5}}(t)\times\\ &\quad\times([n-2,0]+[n-1,0]+[n-2,1]+[n-3,0]_x)_{\epsilon}(t)\,dt + C\\ &\leq C.\end{aligned}$$

- Cuando $i=2$, por la hipótesis de inducción (4.58) tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{322}(t)|\,dt &\leq \int_0^T \|(\partial_x^2 u)^2\chi_{\frac{\epsilon}{5}}(\cdot+\nu t)\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x^n u\partial_x^{n-2}u|\chi_\epsilon\,dxdy\,dt\\ &\leq C\int_0^T [n,0]_{\epsilon,b}(t)\,dt + \int_0^T [n-2,0]_{\epsilon,b}(t)\,dt\\ &\leq C + C\int_0^T [n,0]_{\epsilon,b}(t)\,dt.\end{aligned}$$

- Por último, para estimar la cantidad $|A_{323}(t)|$, nuevamente de (4.58) y (4.54)

$$\begin{aligned}&\int_0^T |A_{323}(t)|\,dt\\ &\leq \int_0^T \|(\partial_x^2 u)^2\chi_{\frac{\epsilon}{5}}(\cdot+\nu t)\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_x^{n-1} u\partial_x^{n-2}u|\chi_\epsilon'(x+\nu t)\,dxdy\,dt\\ &\leq C\int_0^T [n-2,0]_{x,\epsilon,b}(t)\,dt + C\int_0^T [n-3,0]_{x,\epsilon,b}(t)\,dt\\ &\leq C.\end{aligned}$$

Concluyendo para la cantidad $\int_0^T |A_{32}(t)|\,dt$ que:

$$\int_0^T |A_{32}(t)|\,dt \leq C + C\int_0^T [n,0]_{\epsilon,b}(t)\,dt. \tag{4.64}$$

Retomando a la desiguladad en (4.62), acotamos cada miembro $\int_0^T |A_{3j}(t)|\,dt$, para $j=3,\cdots,n-2$ veamos:

$$\begin{aligned}&\int_0^T |A_{3j}(t)|\,dt\\ &\leq c_j\int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2}\partial_x^j u\partial_x^{n+1-j}u\partial_x^n u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right|\,dt\\ &\leq c_j\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left[\partial_x^j u\partial_x^{n+1-j}u\right]^2(t)\chi_{\epsilon,b} + c_j\int_0^T [n,0]_{\epsilon,b}(t)\,dt\\ &\leq c_j\int_0^T ([j,0]+[j+1,0]+[j,1]+[j-1,0]_x)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\times\\ &\qquad\times([n+1-j,0]+[n+2-j,0]+[n+1-j,1]+[n-j,0]_x)_{\epsilon,b}\,dt\\ &\leq C.\end{aligned} \tag{4.65}$$

La última acotación, es decir (4.65) se sigue de (4.58) ya que $3 \leq j \leq n-2$ y así de (4.60)-(4.65) se obtiene a partir de la desigualdad de Gronwall:

$$\sup_{t\in[0,T]} [n,0]_{\epsilon,b}(t) \leq C(\|u_0\|_{H^{n-1}(\Omega;\chi\, dxdy)}; \|(\partial_x^n u_0)^2\chi_{\epsilon,b}\|_{L^1}) \exp\left(\int_0^T \|u_x(t)\|\, dt\right) \leq C.$$

Y nuevamente por (4.61)

$$\sup_{t\in[0,T]} [n,0]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [n,0]_{x,\epsilon,b}(t) + [n,0]_{y,\epsilon,b}(t)\, dt \leq C, \tag{4.66}$$

con $C = C(\epsilon;\nu;T;\|u_0\|_s;\|u_0\|_{H^{n-1}(\Omega\ ;\ \chi_{\epsilon,b}\, dx)};\|(\partial_x^n u_0)^2\chi_{\epsilon,b}\|_{L^1})$.

Casos (n-1,1), (n-2,2) $\cdots$, (1,n-1).

Tendremos presente (4.61) y consideramos $\beta,\ \gamma$ multi-índices tales que $\alpha = \beta+\gamma$. De este modo, $n = |\beta|+|\gamma|$, con lo que la cantidad a estimar $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt$, depende de los términos $\beta,\ \gamma$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\, dt \\
&\leq \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial^\alpha(uu_x)\partial^\alpha u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\right| dt \\
&= \int_0^T \left|\sum_{\beta,\gamma} c_{\beta,\gamma}\int_{\mathbb{R}^2} \partial^\beta u\partial_x\partial^\gamma u\partial^\alpha u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\right| dt \\
&\leq \int_0^T \left|\left(\sum_{\substack{0\leq|\beta|<3;\ \gamma \\ n-2\leq|\beta|\leq n\ ;\gamma}} + \sum_{3\leq|\beta|<n-2;\ \gamma}\right) c_{\beta,\gamma}\int_{\mathbb{R}^2} \partial^\beta u\partial_x\partial^\gamma u\partial^\alpha u\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\right| dt \\
&= \int_0^T |S_{1,\beta,\gamma}(t) + S_{2,\beta,\gamma}(t)|\ dt.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Con lo que hemos transformado la cantidad a estimar en estos dos casos. Acotemos inicialmente la cantidad $\int_0^T |S_{2,\beta,\gamma}(t)|\, dt$:

$$\int_0^T |S_{2,\beta,\gamma}(t)|\, dt = \sum_{3\leq|\beta|<n-2;\ \gamma} C_{\beta,\gamma}\int_0^T |A_{\beta,\gamma}(t)|\, dt.$$

Con lo que para cada $\beta = (\beta_1,\beta_2),\ \gamma = (\gamma_1,\gamma_2)$ con $3 \leq |\beta| < n-2$ obtenemos:

$$\int_0^T |A_{\beta,\gamma}(t)|\, dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[\partial^\beta u\partial_x\partial^\gamma u\right]^2 \chi_\epsilon\, dxdy \ + \ c_{\beta,\gamma}[\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t)\, dt.$$

A partir de (2.19), tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T |A_{\beta,\gamma}(t)|\,dt \leq \int_0^T &([\beta_1,\beta_2]+[\beta_1+1,\beta_2]+[\beta_1,\beta_2+1]+[\beta_1-1,\beta_2]_x)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\times\\ &\times([\gamma_1+1,\gamma_2]+[\gamma_1+2,\gamma_2]+[\gamma_1+1,\gamma_2+1]+[\gamma_1,\gamma_2]_x)_{\epsilon,b}\,dt\\ &\quad+C\int_0^T[\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t)\,dt\\ \leq C+C\int_0^T&[\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4.68}$$

Es importante observar que en la estimación anterior:

- Si en (4.68) se tiene que $|\beta|+1\geq|\gamma|$, entonces los parentesis $(\ \cdot\ )_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}$ y $(\ \cdot\ )_{\epsilon,b}$ cambian de posiciones respectivamente de β a γ.
- Ya que $\beta_1\neq 0$ la estimación considerada en (4.68) tiene sentido.
- Puesto que $|\beta|,|\gamma|\leq n-3$, tenemos que las diferentes cantidades $[\delta_1,\delta_2]_{\epsilon,b}$ con $\delta_1,\delta_2\in\mathbb{N}$ como en las estimaciones realizadas en (4.68), tenemos por hipótesis de inducción (4.58), lo cual jusifica la constante C allí descrita.

Ahora, acotamos la cantidad $\int_0^T|S_{1,\beta,\gamma}(t)|\,dt$, descomponiendola en varios sumandos que ya son familiares a partir de las estimaciones $|\alpha|=3,4$,

$$\begin{aligned}\int_0^T|S_{1,\beta,\gamma}(t)|\,dt &\leq \int_0^T\left(|A_{|\beta|\leq 1}(t)+A_{|\beta|=n}(t)|\right)\,dt+\int_0^T\left(|A_{|\beta|=2}(t)+A_{|\beta|=n-1}(t)|\right)\,dt\\ &:=\mathbb{I}_1+\mathbb{I}_2\end{aligned}$$

Comenzamos con la cantidad $\mathbb{I}_2$, notando que para este caso exiten multi-indices para cada $i=1,2$, δ_i, η_i con $|\delta_i|=2$ y $|\eta_i|=n-1$ tales que:

$$\mathbb{I}_2:=\int_0^T|A_{|\beta|=2}(t)+A_{|\beta|=n-1}(t)|=\sum_{i=1,2}c_i\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\partial^{\delta_i}u\partial_x\partial^{\eta_i}u\partial^{\alpha}u\chi_\epsilon\,dxdy\,dt$$

por lo que tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_2&\leq\sum_i\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}(\partial^{\delta_i}u)^2(\partial^{\eta_i}u)^2\chi_\epsilon(x+\nu t)\ +\ [\alpha_1,\alpha_2]_\epsilon\,(t)\,dt\\ &\leq\sum_i\int_0^T\|(\partial^{\delta_i}u)^2\chi_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon}\|_{L^\infty}\,[\eta_1,\eta_2]_\epsilon\,(t)+\int_0^T[\alpha_1,\alpha_2]_\epsilon(t)\,dt\\ &\leq C+C\int_0^T[\alpha_1,\alpha_2]_\epsilon\,dt,\end{aligned} \tag{4.69}$$

donde esta última estimación se tiene gracias a (4.54) y a la hipótesis de inducción (4.58).

Ahora acotamos la cantidad $\mathbb{I}_1$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}_1 &= \int_0^T |A_{|\beta|\le 1}(t) + A_{|\beta|=n}(t)|\,dt \\
&\le \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} u(\partial^\alpha u)^2\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t) + u_x(\partial^\alpha u)^2\chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\right| \\
&\qquad + \left|\int_{\mathbb{R}^2} u_y(\partial^{(\alpha_1+1,\alpha_2-1)}u)(\partial^\alpha u)\chi_{\epsilon,b})\right|\,dt \\
&\le \int_0^T (\|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty})_{\epsilon,b}\,[\alpha_1,\alpha_2] + \|u_y(t)\|_{L^\infty}[\alpha_1+1,\alpha_2-1]\,dt \\
&\qquad + \|u\|_{L^\infty_T H^s}\int_0^T [\alpha_1-1,\alpha_2]_x(t)\,dt.
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

Por lo cual se sigue de (4.67) y (4.69)-(4.70):

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)|\,dt \le C + C\int_0^T (\|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty} + C)_{\epsilon,b}\,[\alpha_1,\alpha_2],dt \\
+ C\int_0^T \|u_y(t)\|_{L^\infty}[\alpha_1+1,\alpha_2-1]\,dt.
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Luego, retornando a la desigualdad base (4.61) y la estimación recien estudiada (4.71), al sumar todos los casos $\alpha = (n-1,1),\ (n-2,2),\cdots,(1,n-1)$, tenemos por la desigualdad de Gronwall:

$$
\sup_{t\in[0,T]} \sum_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha\ne(n,0)\ ;\ \alpha\ne(0,n)}} [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) \le C.
$$

donde $C = C(\epsilon,;\ \nu;\ T;\ \|u_0\|_{s,2};\ \|u_0\|_{H^n(\Omega;\chi_{\epsilon,b}\,dxdy)};)$.
Y consecuentemente por (4.61)

$$
\sup_{t\in[0,T]} \sum_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha\ne(n,0);\alpha\ne(0,n)}} [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t) \le C, \tag{4.72}
$$

donde $C = C(\epsilon,;\ \nu;\ T;\ \|u_0\|_{s,2};\ \|u_0\|_{H^n(\Omega;\chi_{\epsilon,b}\,dxdy)})$.

Caso (0,n).

Para este último caso, suponemos la hipótesis de inducción (4.58), y las acotaciones ya logradas en (4.66) y en (4.72). Además tenemos en cuenta las estimaciones logradas en (4.61), por lo que basta estimar la cantidad $\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt$ donde $\alpha = (0,n)$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |A_3^\alpha(t)|\,dt &= \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^n(uu_x))(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right|\,dt \\
&= \int_0^T \left|\sum_{j=0}^n c_j \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^j u)(\partial_y^{n-j}u_x)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right|\,dt \\
&\le \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} c_0 u(\partial_y^n u)\chi'_{\epsilon,b} + c_{0,n}u_x(\partial_y^n u)^2\chi_{\epsilon,b} + c_1 u_y(\partial_x\partial_y^{n-1}u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b}\right|\,dt \\
&+ \int_0^T \left|\int_{\mathbb{R}^2} c_2(\partial_y^{n-1}u)(\partial_x\partial_y u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b} + c_{n-2}(\partial_y^2 u)(\partial_x\partial_y^{n-2}u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b}\right|\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T \left| \sum_{j=3}^{n-2} c_j \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^j u)(\partial_x \partial_y^{n-j} u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) \right| \, dt \\
&\leq \int_0^T \sum_{i=0}^{n} |A_{3,i}(t)| \, dt.
\end{aligned} \tag{4.73}
$$

Pero observamos que los tres primeros sumandos pueden ser acotados o señalar un término que *a posteriori* es acotado empleando la desigualdad de Gronwall, esto es

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \sum_{i=0}^{2} |A_{3,i}(t)| \\
&\leq \|u\|_{L_T^\infty H^s} \int_0^T [0,n-1]_{y,\epsilon,b}(t)\, dt + \int_0^T (\|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty})\, [0,n]_{\epsilon,b}(t)\, dt \\
&\qquad + \int_0^T \|u_y(t)\|_{L\infty} [1,n-1]_{\epsilon,b}(t)\, dt \\
&\leq C + \int_0^T (\|u_x(t)\|_{L^\infty} + \|u_y(t)\|_{L^\infty})\, [0,n]_{\epsilon,b}(t)\, dt
\end{aligned} \tag{4.74}
$$

Procedamos ahora a acotar la cantidad

$$
\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} c_2 \partial_y^{n-1} u \partial_x \partial_y u \partial_y^n u \chi_{\epsilon,b} + c_{n-2}(\partial_y^2 u)(\partial_x \partial_y^{n-2} u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b} \right| \, dt.
$$

Ya que estos términos poseen en su integrando un factor con derivadas de orden 2 ,$n-1$ y n, razonando de manera análoga a como abordamos la estimación (4.69) descrita en los casos $(n-1,1), \cdots, (1,n-1)$, vemos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} c_2(\partial_y^{n-1} u)(\partial_x \partial_y u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b} + c_{n-2}(\partial_y^2 u)(\partial_x \partial_y^{n-2} u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b} \right| \, dt \\
&\leq \int_0^T \|(\partial_x \partial_y u)^2 \chi_{\frac{\epsilon}{5}}\|_{L^\infty} [0,n-1]_\epsilon(t) + \|(\partial_y^2 u)^2 \chi_{\frac{\epsilon}{5}}\|_{L^\infty} [1,n-2]_\epsilon(t)\, dt \\
&\qquad + C \int_0^T [0,n]_{\epsilon,b}(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.75}
$$

Así por último acotemos cada uno de los demás sumandos considerados en (4.73), esto es para $j = 3, \ \cdots \ , n-2$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T |A_{3,j}(t)|\, dt \\
&= \int_0^T \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^j u)(\partial_x \partial_y^{n-j} u)(\partial_y^n u)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy \right| \, dt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_y^j u)(\partial_x \partial_y^{n-j} u)\right]^2 \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t) \ + \ [0,n]_{\epsilon,b}(t)\, dt \\
&\leq \int_0^T ([0,j]+[1,j]+[0,j+1]+[0,j-1]_y,)_{\frac{\epsilon}{5},\epsilon} \times \\
&\qquad \times ([0,n-j]+[1,n-j]+[0,n-j+1]+[0,n-j-1]_y)_\epsilon \, dt \\
&\leq C.
\end{aligned} \tag{4.76}
$$

En (4.73) tenemos que los sumandos $\int_0^T |A_{3,j}(t)|\,dt$ son acotados para $j = 3, \cdots, n-2$, ya que en las cantidades $[\cdot,\cdot]_\epsilon$ que aparecen en (4.73) la suma de sus componentes son menores que o iguales a $n-1$, por lo que se aplica la hipótesis de inducción (4.58) en cada miembro.
Por lo cual de (4.61) y las estimaciones logradas para este caso $(0, n)$, (4.73)-(4.76),tenemos en general:

$$\sup_{t\in[0,T]} [0,n]_\epsilon + \int_0^T [0,n]_{x,\epsilon,b}(t) + [0,n]_{y,\epsilon,b}(t)\,dt \leq C, \tag{4.77}$$

donde $C = C(\epsilon; \nu; T; \|u_0\|_{s,2}; \|u_0\|_{H^n(\Omega;\chi_\epsilon\,dxdy)})$.

Podemos conluir de (4.66), (4.72) y (4.77) que en general se satisface:

$$\sum_{|\alpha|=n} \sup_{t\in[0,T]} [\alpha_1,\alpha_2]_{\epsilon,b}(t) + \int_0^T [\alpha_1,\alpha_2]_{x,\epsilon,b}(t) + [\alpha_1,\alpha_2]_{y,\epsilon,b}(t)\,dt \leq C, \tag{4.78}$$

donde $C = C(\epsilon; \nu; T; \|u_0\|_{s,2}; \|u_0\|_{H^n(\Omega;\chi_\epsilon\,dxdy)})$.

4.6. Justificación a los cálculos formales.

Ahora para justificar los anteriores cálculos formales, seguiremos un argumento estandar de compacidad y la dependencia continua del (PVI) del problema (1.1). Sin perdida de generalidad se prueba la desigualdad (4.12).

Para tal objetivo, consideramos la familia de datos iniciales $u_0^\tau := \rho_\tau * u_0$ con:

- $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,
- $\operatorname{supp}(\rho) \subset D(0,1)$,
- $\rho \geq 0$, y con
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x)\,dx = 1.$

Así definimos:

$$\rho_\tau(z) = \frac{1}{\tau^2}\rho\left(\frac{z}{\tau}\right) \qquad \text{con} \quad \tau > 0.$$

Denominando u^τ y T_τ la solución y el tiempo de existencia asociados al (PVI) de la ecuación (ZK) respectivamente, con dato inicial $u_0^\tau := \rho_\tau * u_0$, y denotamos u y T solución y el tiempo de existencia al (PVI) asociado a la ecuación (ZK) con dato inicial u_0. Así la familia de solucinoes $\{u_\tau\}_\tau$ satisface por el Teorema 3.1:

$$u^\tau \in C([0,T_\tau] : H^\infty(\mathbb{R}^2)) \tag{4.79}$$

En efecto para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos para α multi-índice con $|\alpha| = n$:

$$\|\partial^\alpha(\rho_\tau * u_0)\|_0 = \|\partial^\alpha(\rho_\tau) * u_0\|_0 \leq \pi \max_x |\partial^\alpha \rho_\tau| \|u_0\|_0.$$

Para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}^2$. Con lo que $u_0^\tau \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$. Así por la propiedad de persistencia conseguimos (4.79).

Además si u es solución para el dato inicial $u_0 \in H^{1^+}$, se verifica que:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u^\tau(t) - u(t)\|_{s,2} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \downarrow 0. \tag{4.80}$$

Puesto que $\|\widehat{\rho_\tau}\|_{L^\infty} \leq 1$ y la estimación

$$\begin{aligned}\|u_0^\tau - u_0\|_{s,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^s |\widehat{\rho_\tau} - 1|^2 |\widehat{u_0}(\xi,\eta)|^2 \, d\xi d\eta \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} (1+\xi^2+\eta^2)^s |\widehat{u_0}(\xi,\eta)|^2 \, d\xi d\eta,\end{aligned}$$

se sigue por el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$\|u_0^\tau - u_0\|_{s,2} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \downarrow 0, \tag{4.81}$$

y como consecuencia de la continuidad respecto a los datos iniciales se consigue (4.80).

Por otra parte ya que el tiempo de existencia T_τ, asociado al dato inicial u_0^τ depende de la cantidad $\|u_0^\tau\|_{s,2}$, esto es $T_\tau = T(\|u_0^\tau\|_{s,2})$ tenemos además que $T_\tau = T(\|u_0^\tau\|_{s,2}) \to T(\|u_0\|_{s,2}) = T$, es decir $T(\|u_0^\tau\|_{s,2})$ converge a al tiempo $T(\|u_0\|_{s,2})$ cuando τ se va aproximando cero, así con la anterior observación, junto con (4.79), podemos decir que para τ suficientemente pequeño:

$$(u^\tau)_{\tau>0} \subset C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)).$$

También deducimos que la constante C en el argumento temporal es independiente de τ.

Aplicando el argumento en (4.7)-(4.12) a cada miembro de la familia $(u^\tau)_\tau$ tenemos, junto con (4.12):

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^2} &\left((u_x^\tau)^2 + (u_y^\tau)^2\right) \chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy + \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[(u_{xx}^\tau)^2 + (u_{xy}^\tau)^2 + (u_{yy}^\tau)^2\right] \chi'_{\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt \leq C,\end{aligned} \tag{4.82}$$

con $C = C(\epsilon; \nu; T(\|u_0^\tau\|_{s,2}); \|(\partial^\alpha u_0^\tau)^2 \chi_{\epsilon,b}\|_{L^1}; |\alpha| = 1; s = 1^+)$.

Además vemos que en la variable $\|u_0^\tau\|_{s,2}$ es una función continua por tratarse de composiciones de funciones continuas, sumas y productos, deducimos que en dicha posición de C es independiente de τ, pues de (4.81) se deduce $\|u_0^\tau\|_{s,2} \longrightarrow \|u_0\|_{s,2}$ cuando $\tau \downarrow 0$.

Ya para finalizar, basta mostrar que la cantidad $\|(\partial^\alpha u)^2 \chi_\epsilon\|_{L^1_{x,y}}$ es acotada por un término independiente de τ.

Pero para $0 < \tau < \epsilon$ tenemos en el caso particular $|\alpha| = 1$,

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha u_0^\tau(x,y))^2 \chi_{\epsilon,b}(x) &= \left[\int_{D((x,y),\tau)} \rho_\tau((x,y) - \overrightarrow{y}) \partial^\alpha u_0(\overrightarrow{y})\, d\overrightarrow{y}\right]^2 \chi_{\epsilon,b}(x) \\ &= \left[\int_{D((x,y),\tau)} \rho_\tau((x,y) - \overrightarrow{y}) \partial^\alpha u_0(\overrightarrow{y}) 1_{[\epsilon,\infty)\times\mathbb{R}}(\overrightarrow{y})\, d\overrightarrow{y}\right]^2 \chi_{\epsilon,b}(x) \\ &= \left(\rho_\tau * (\partial^\alpha u_0) 1_{[\epsilon,\infty)\times\mathbb{R}}\right)^2 \chi_{\epsilon,b}.\end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned}\|(\partial^\alpha u_0^\tau)^2\chi_{\epsilon,b}\|_{L^1_{x,y}} &\leq \|\rho_\tau * (\partial^\alpha u_0)1_{[\epsilon,\infty)\times\mathbb{R}}\|_{L^2_{x,y}} \\ &= \|\rho_\tau\|_{L^1_{x,y}}\|(\partial^\alpha u_0)1_{[\epsilon,\infty)\times\mathbb{R}}\|_{L^2_{x,y}} \\ &= \|(\partial^\alpha u_0)1_{[\epsilon,\infty)\times\mathbb{R}}\|_{L^2_{x,y}}.\end{aligned}$$

De este modo tenemos en particular de (4.82) que para para cualquier $t \in [0,T]$:

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[(u_x^\tau)^2 + (u_y^\tau)^2\right](x,y,t)\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \leq C, \tag{4.83}$$

donde C una contante independiente de τ.
Esto implica que las familias $(u_x^\tau)_{\tau>0}$ y $(u_y^\tau)_{\tau>0}$ son acotadas en el espacio de Hilbert $H_{\epsilon,b} := L^2(\mathbb{R}^2;\chi_{\epsilon,b}(\cdot+\nu t)\,dxdy)$, luego existen subsucesiones (τ_i), (τ_k) y elementos l_x, $l_y \in H_{\epsilon,b}$ tales que:

$$u_x^{\tau_i} \rightharpoonup l_1 \;\text{ y }\; u_y^{\tau_k} \rightharpoonup l_2 \text{ cuando } \; i,k \longrightarrow \infty.$$

Pero si consideramos $\phi \in C_0^\infty([\epsilon - a\nu t,\infty)\times\mathbb{R})$ para $a>1$ una función de prueba tenemos que para $j = x \; o \; y$, empleado la convergencía débil, (4.78) y (4.80) tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^2} l_j\phi = \lim_{i\longrightarrow\infty}\int_{\mathbb{R}^2} u_j^{\tau_i}\phi = \lim_{i\longrightarrow\infty} -\int_{\mathbb{R}^2} u^{\tau_i}\phi_j = -\int_{\mathbb{R}^2} u\phi_j$$

Precisando aún mas la última identidad sabemos por (4.77) que tenemos convergencia uniforme en compactos del plano, en particular en el soporte $supp(\phi_j)$ de las funciones ϕ_j.
Lo anterior comprueba que $l_j = u_j$ con $j = x$ o $j = y$ en el sentido de las distribuciones, de este modo y por la estimativa

$$\|u\|_{H_{\epsilon,b}} \leq \liminf_i \|u_i\|_{H_{\epsilon,b}}$$

que se obtiene en general para espacios de Hilbert, junto con (4.83) conseguimos finalmente:

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^2}\left[(u_x(t))^2 + (u_y(t))^2\right]\chi_{\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \leq C.$$

□

4.7. Algunas conclusiones.

El argumento presentado para verificar el Teorema (4.1), nos permite concluir resultados que en los trabajos [8] y [6] se realizan respectivamente para las ecuaciones KPII y k-gKdV. No sin antes mencionar el siguiente corolorio, que permite inferir que la Propagación de regularidad asociada a la ecuación k-gZK es similar a la obtenida en [6], lo cual no sorprende pues la ecuación (ZK) se introdujo como un módelo bidimensional de la ecuación KdV con efectos transversales en la dirección y.

Corolario 4.1. [6] *Si* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *con* $s > 1$ *y existen valores* $l \in \mathbb{Z}^+$, *con* $l \geq 1$, *y* $x_0 \in \mathbb{R}$, *tales que*

$$\sum_{|\alpha|=l-1} \| \partial^\alpha u_0 \|^2_{L^2((x_0,\infty)\times\mathbb{R})} = \sum_{|\alpha|=l-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty} | \partial^\alpha u_0(x,y) |^2 \; dxdy < \infty, \tag{4.84}$$

para α *multi-indice de orden* $l-1$ *y si*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_0}^{\infty} | \partial_x^l u_0(x,y) |^2 \; dxdy < \infty. \tag{4.85}$$

Entonces las soluciones dadas por el Teorema (3.2) *satisface que para cualquier* $\nu \geq 0$ *y* $\epsilon > 0$ *las condiciones* (4.2) *y* (4.3) *para* α *de orden* $l-1$ *y además*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_0+\epsilon-\nu t}^{\infty} (\partial_x^l u)^2(x,t)\, dxdy < C. \tag{4.86}$$

También satisface el siguiente efecto regularizante, para los valores ya pre-escritos y $R > \epsilon$

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_0+\epsilon-\nu t}^{R+\epsilon-\nu t} (\partial_x^{l+1} u)^2 + (\partial_y\partial_x^l u)^2\, dxdy\, dt < C. \tag{4.87}$$

Demostración.
La demostración de este Corolario (4.1), se sigue de los casos ya analizados en el Teorema 4.1: **(0,0), (1,0), (2,0),** $\cdots$**, (n,0),**$\cdots$. □

Corolario 4.2. *En las mismas condiciones del Teorema 4.1 con* $s > 3/4$ *y si además* $\partial_y u_0 = 0$, *entonces siguen valiendo las desigualdades* (4.86) *y* (4.87).

Demostración.
Si $\partial_y u_0 = 0$, es claro empleando estimaciones de energía que la solución u asociada a dicho (PVI), satisface $u_y = 0$ y así por un argumento de compacidad podemos ver que $u_{yyy} = 0$, de modo que u es solución al (PVI) asociado al dato u_0 de la ecuación (k-gKdV) y de aqui se deduce el Corolario (4.2). □
Otra consecuencia directa del Teorema 4.1, que comparte con las ecuaciones (KPII) y (k-gKdV).

Corolario 4.3. *Sea* $u \in C\left([-T,T];H^s(\mathbb{R}^2)\right)$, *una solución de* (1.1). *Si existe* $l \in \mathbb{Z}^+$, $l \geq 1$, $\widehat{t} \in (-T,T)$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$u(\cdot,\widehat{t}) \notin H^l((x_0,\infty)\times\mathbb{R}),$$

entonces para cualquier $t \in (-T,\widehat{t})$ *y cualquier* $a \in \mathbb{R}$

$$u(\cdot,t) \notin H^l((a,\infty)\times\mathbb{R}).$$

Demostración. Consecuencia directa de que el problema (1.1) sea reversible en el tiempo en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ y del Teorema 4.1. □

CAPÍTULO 5

Decaida en la variable x de la ecuación (k-gZK).

En este capítulo estudiamos la decaida de las soluciones del (PVI) asociada a la ecuación (k-gZK) en la variable x, que describe más precisamente una propiedad de persistencia y un efecto regularizante en el semiplano derecho a partir del peso $x^{\frac{n}{2}}$ considerado en el dato inicial a dicho (PVI), más precisamente

Teorema 5.1. *Si $u_0 \in H^{1+}(\mathbb{R})$ y si para algún $n \in \mathbb{Z}^+$ se satistace*

$$\|x^{n/2}u_0\|^2_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} |x|^n |u(x,y)|^2\,dxdy < \infty. \tag{5.1}$$

Entonces la solución u del problema de valor inicial (PVI) asociado a la ecuación (k-gZK) que existe por el Teorema (3.2) satisface que:

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} |x|^l |u(x,y,t)|^2\,dxdy \ \leq \ C \tag{5.2}$$

para cada $l = 1, \cdots, n$ donde $C = C(n; T; \|u_0\|_{1^+,2}; \|x^{n/2}u_0\|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R})})$.
Además dados $\epsilon,\ \delta > 0,\ \nu \geq 0$ y si consideramos $m, j \in \mathbb{Z}^+$ con $m, j \geq 1$ y $m + j \leq n$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=m} \sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{\infty} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t) x_+^j\,dxdy \\ &\qquad + \sum_{|\alpha|=m}\int_\delta^T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{\infty} \left[(\partial_x\partial^\alpha u)^2(x,y,t) + (\partial_y\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\right] x_+^{j-1}\,dxdy\,dt \leq C. \end{aligned} \tag{5.3}$$

En caso de que $j = 0$, tenemos que para $R > \epsilon$,

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=n} \sup_{t\in[0,T]} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{\infty} (\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\,dxdy \\ &\qquad + \sum_{|\alpha|=n}\int_\delta^T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\epsilon-\nu t}^{R-\nu t} \left[(\partial_x\partial^\alpha u)^2(x,y,t) + (\partial_y\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\right]\,dxdy\,dt \leq C, \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde $C = C(n; T; \epsilon; \nu; R; \|u_0\|_{1^+,2}; \|x^{n/2}u_0\|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{R})})$ en ambas situaciones.

El argumento de prueba está basado en los resultados obtenidos por P. Isaza, F. linares y G. Ponce en el contexto de k-gKdV. Como en el Teorema 4.1, se muestran condiciones suficientes en el lenguaje de las funciones de corte de orden n, $\{\chi_{n,\epsilon,b}\}$, que se desarrollan para obtener (5.2)-(5.4).

Lema 5.1. *Dado $\epsilon > 0$, sean $b \geq 5\epsilon$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se considera la familia $\{\chi_{n,\epsilon,b}\}_{n\in\mathbb{Z}^+,\epsilon>0,b\geq 5\epsilon}$ y si para cualquier $\nu \geq 0$ se obtine para $m, j \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq \delta < T$ tenemos:*

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m} \sup_{[\delta,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 (x,y,t)\chi_{j,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \\ + \int_\delta^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x\partial^\alpha u)^2 + (\partial_y\partial^\alpha u)^2\right](x,y,t)\chi'_{j,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \leq C.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Entonces

- *Si $\delta = 0$ obtenemos 5.2.*
- *Si $\delta > 0$ obtenemos (5.3)-(5.4).*

Omitimos la demostración del Lema (5.1), pues se sigue teniendo presente la Proposición (2.12) y la idea del Lema (4.1). □

Demostración del Teorema (5.1).

Por nuestra experiencia en el capítulo anterior, consideramos la identidad:

$$\begin{aligned}0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 \chi_l(x+\nu t)\,dxdy - \frac{v}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 \chi'_l(x+\nu t)\,dxdy \\ + \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x\partial^\alpha u)^2\chi'_l(x+\nu t)\,dxdy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y\partial^\alpha u)^2\chi'_l(x+\nu t)\,dxdy \\ - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2\chi'''_l(x+\nu t)\,dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} \partial^\alpha(uu_x)(\partial^\alpha u)\chi_l(x+\nu t)\,dxdy,\end{aligned} \tag{5.6}$$

para α multi-indice y $j \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|\alpha| + l \leq n$.
Así de (5.6) obtenemos:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 \chi_l(x+\nu t)\,dxdy \\ &\quad + \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x\partial^\alpha u)^2\chi'_l(x+\nu t)\,dxdy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y\partial^\alpha u)^2\chi'_l(x+\nu t)\,dxdy \\ &\quad \leq \frac{\nu}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2\chi'_l(x+\nu t)\,dxdy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2|\chi'''_l(x+\nu t)|\,dxdy \\ &\qquad + \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial^\alpha(uu_x)\partial^\alpha u\chi_l(x+\nu t)\,dxdy\right| \\ &\quad = A_1^{\alpha,l}(t) + A_2^{\alpha,l}(t) + A_3^{\alpha,l}(t).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Por lo cual de (5.7) deseamos mostrar que las cantidades $\int_0^T |A_i^{\alpha,l}(t)|\,dt$ son acotadas ó que en uno de sus sumandos, despúes de aplicar ciertas acotaciones, aparece la cantidad

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(t)(\partial^\alpha u)^2\chi_l(x+\nu t)\,dxdy,$$

con h una función con integral finita en $[0,T]$, para así aplicar la desigualdad de Gronwall. Tendremos en cuenta (5.7), para así lograr el objetivo anteriormente propuesto, razón por la que dividimos el capítulo en varias secciones dependiendo del valor entero n dado en la hipótesis y los valores α, l tales que $|\alpha|+l\leq n$.

5.1. Caso $\alpha = (0,0)$ y pesos $x^{\frac{n}{2}}$.

En esta sección veremos en base al Lema (5.1), la persistencia del peso $x^{\frac{n}{2}}$ en la semirecta $[0,\infty)$, de las soluciones asociadas al (PVI) de la ecuación (k-ZK), es decir, probaremos (5.2). Para este caso es fundamental tener presente que $|\chi^{(j)}_{n,\epsilon,b}(x)|\leq c_{n,j}+\chi_{n,\epsilon,b}(x)$, para $x\geq 0$. De esta forma para $i=1,2$, tenemos:

$$\begin{aligned}|A_i^{\alpha,l}(t)| &\leq C(\nu)\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi'_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\\ &\leq C(\epsilon,\nu,l)\int_{\mathbb{R}^2} u^2\,dxdy + C\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\\ &= C(\epsilon,\nu,l)\|u_0\|_0^2 + C\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Para acotar la cantidad $|A_3(t)|$, empleando (3.8), vemos que:

$$\begin{aligned}|A_3(t)| &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u^2u_x\chi_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\\ &\leq \|u_x(t)\|_{L^\infty_{x,y}}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Por lo cual de (5.7) , (5.8)-(5.9) y la desigualdad de Gronwall, hemos conseguido:

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \leq C\exp\left(\int_0^T \|u_x(t)\|_{L^\infty_{x,y}}\,dt\right)\leq C,\tag{5.10}$$

donde $C=C(\epsilon;\nu;b;l;T;\|u_0\|_{s,2};\|(u_0)^2\chi_{n,\epsilon,b}\|_{L^1_{x,y}})$.
Obtenemos de (5.7) y (5.10),

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{|\beta|=1}(\partial^\beta u)^2\chi'_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\leq C,\tag{5.11}$$

con $C=C(\epsilon;\nu;b;l;T;\|u_0\|_{s,2};\|(u_0)^2\chi_{n,\epsilon,b}\|_{L^1_{x,y}})$.
Se sigue entonces de (5.11) y el Lema (5.1), obtenemos la conclusión (5.2).
Por otra parte de la desigualdad $\chi_{j,\epsilon,b}(x)\leq C_{j\epsilon,b}+\chi_{n,\epsilon,b}(x)$ para $1\leq j\leq n$, (2.18) y la desigualdad (5.11), conseguimos:

$$\sup_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{j,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\leq C\|u_0\|_0^2+\sup_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{n,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\leq C.$$

para $j=0,1,\cdots,n$ y consecuentemente:

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^2} u^2\chi_{j,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{|\alpha|=1}(\partial^\alpha u)^2\chi'_{j,\epsilon,b}(x+\nu t)\leq C,\tag{5.12}$$

para $j=0,1,\cdots,n$ esto es, el caso $(n,(0,0))$ implica los casos $(j,(0,0))$.
Con esto queda demostrado (5.2).

5.2. Caso $n = 1$.

Para este caso $n = 1$, queda por estudiar el caso $(0, \alpha)$ con $|\alpha| = 1$ pues (5.12) ya fue verificada con $\alpha = (0, 0)$. Asumimos como hipótesis general (5.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x|u_0(x, y)|^2 \, dxdy < \infty.$$

De (5.12) para $j = 1$ y $\delta > 0$, logramos:

$$\int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|=1} (\partial^\alpha u)^2 \chi'_{1,\epsilon,b}(x + \nu t) \, dxdy \, dt \leq C.$$

Ya que la integral en la variable temporal t es finita, el integrando resulta finito en $[0, T]$ salvo un conjunto de medida Lebesgue nulo, por lo cual existe $\widehat{t} \in (0, \delta)$ con $\nu = 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x u)^2 (x, \widehat{t}) + (\partial_y u)^2 (x, \widehat{t}) \right] \chi'_{1,\epsilon,b}(x) \, dxdy \leq C.$$

Puesto que $\chi_0 \leq \chi'_1$ en (2.15), deducimos del Teorema (4.1):

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=1} \sup_{[\widehat{t}, T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 (x, y, t) \chi_{0,\epsilon,b}(x + \nu t) \, dxdy \\ &\qquad + \sum_{|\alpha|=2} \int_{\widehat{t}}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 \chi'_{0,\epsilon,b}(x + \nu t) \, dxdy \, dt \leq C, \end{aligned} \tag{5.13}$$

con $C = C(\epsilon; \nu; T; \|u_0\|_{s,2}; \|(u_0)^2 \chi_1\|_{L^1_{x,y}})$, lo cual demuestra la afirmación $(0, (\alpha_1, \alpha_2))$ con $|(\alpha_1, \alpha_2)| = 1$, y además usando el Lema (5.1) obtenemos (5.4).

5.3. Caso $n = 2$.

De (5.12) con $j = 2$ y la hipótesis general

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |x|^2 |u_0(x, y)|^2 \, dxdy < \infty,$$

además que para cualquier $\delta > 0$ se sigue

$$\int_0^\delta \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|=1} (\partial^\alpha u)^2 \chi'_2(x + \nu t) \, dxdy \, dt \leq C.$$

Y así existe $\widehat{t} \in (0, \delta)$ con $\nu = 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|=1} (\partial^\alpha u)^2 (x, y, \widehat{t}) \chi'_2(x) \, dxdy \leq C.$$

Por (2.15) con $j=2$ y retomando a la estimativa (5.7) con $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ y $|\alpha|=1$, los casos $(1,\alpha)$ tenemos que acotar las cantidades:

$$\int_{\widehat{t}}^{T} |A_i^{\alpha}(t)|\,dt,$$

con $i=1,\ 2,\ 3$:
Para $i=1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{t}}^{T} |A_1^{\alpha}(t)|\,dt &\leq \int_{\widehat{t}}^{T} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2\right]\chi'_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\ &\leq C.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Pero esta expresión es acotada por (5.12) con $j=1$.
De forma análoga podemos acotar la cantidad

$$\int_{\widehat{t}}^{T} |A_2^{\alpha}(t)|\,dt \leq C, \tag{5.15}$$

teniendo presente (2.17) y (5.12) con $j=0$. Por último, cuando $i=3$ estimamos la cantidad $\int_{\widehat{t}}^{T} |A_3^{\alpha}(t)|\,dt$, obteniendo:

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{t}}^{T} |A_3^{\alpha}(t)|\,dt &\leq \int_{\widehat{t}}^{T} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_x(uu_x)\partial_x u\chi_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\ &\qquad + \int_{\widehat{t}}^{T} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_y(uu_x)\partial_y u\chi_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\ &= \int_{\widehat{t}}^{T} \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_x u)^3\chi_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\partial_x u)^2\chi'_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\ &\quad + \int_{\widehat{t}}^{T} \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_y^2 u)^2 u_x\chi_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} u(\partial_y u)^2\chi'_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\right| dt \\ &\leq \int_{\widehat{t}}^{T} \|u_x(t)\|_{L^{\infty}_{x,y}} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|=1} (\partial^{\alpha} u)^2\chi_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\|u\|_{L^T H^{1+}} \int_{\widehat{t}}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|=1} (\partial^{\alpha} u)^2\chi'_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \\ &\leq C + C\int_{\widehat{t}}^{T} \|u_x(t)\|_{L^{\infty}_{x,y}} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\alpha|=1} (\partial^{\alpha} u)^2\chi_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt\end{aligned} \tag{5.16}$$

Notamos que en el segundo miembro de (5.16) en la última desigualdad se ha aplicado el Lema Sobolev (2.3), cuyo factor acompañante es la expresión considerada en (5.14). De este modo (5.7), (5.15)-(5.16) y la desigualdad de Gronwall (2.10) implican:

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|=1} \sup_{[\widehat{t},T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\alpha} u)^2(x,y,t)\chi_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=1} \int_{\widehat{t}}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x\partial^{\alpha} u)^2(x,y,t) + (\partial_y\partial^{\alpha} u)^2(x,y,t)\right]\chi'_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt \leq C.\end{aligned} \tag{5.17}$$

donde $C = C\left(\epsilon, \nu, T, \|u_0\|_{s,2}; \|(u_0)^2\chi_{2,\epsilon,b}\|\right)$.
Ahora de (5.17), existe $\widehat{\widehat{t}} \in (\widehat{t}, \delta)$ y considerando $\nu = 0$, se obtiene:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x u)^2 + (\partial_{xy} u) + (\partial_y u)^2\right](x, y, \widehat{\widehat{t}})\chi'_{1,\epsilon,b}(x)\, dxdy \leq C.$$

Por (2.15) tenemos que si $|\beta| = 2$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\beta u)^2 \chi_{0,\epsilon,b}(x + \nu t)\, dxdy \leq C.$$

Así del Teorema (4.1) tenemos para cualquier $\epsilon > 0$ y $\nu \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\sum_{|\beta|=2} \sup_{[\widehat{t},T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\beta u)^2 \chi_{0,\epsilon,b}(x + \nu t)\, dxdy \\ &\qquad + \sum_{|\beta|=2} \int_{\widehat{\widehat{t}}}^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x \partial^\beta u)^2 + (\partial_y \partial^\beta u)^2\right] \chi'_{0,\epsilon,b}(x + \nu t)\, dxdy\, dt \leq C \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde $C = C(\epsilon; \nu; T; \|u_0\|_{s,2}; \|(u_0)^2\chi_{2,\epsilon}\|_{L^1_{x,y}})$.
Esto completa el caso $n = 2$.

El caso $n = 3$ es completamente análogo, por tanto omitimos los detalles.

5.4. Caso $n \geq 4$.

Ahora probaremos el Teorema (5.1) en general para $n \geq 4$, empleando el principio de inducción matemática.
Para ello realizamos las siguientes observaciones:

- Si consideramos la pareja ordenada, (l, α) para α multi-índice de orden m, es decir $|\alpha| = m$, la afirmación (l, α) se interpreta como:

  Para cualquier $\delta > 0$, $\nu \geq 0$, $\epsilon > 0$ y $b \geq 5\epsilon$, tenemos:

  $$\begin{aligned} &\sup_{[\delta,T]} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 \chi_{l,\epsilon,b}(x + \nu t)\, dxdy \\ &\qquad + \int_\delta^T \int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_x \partial^\alpha u)^2 + (\partial_y \partial^\alpha u)^2\right] \chi_{l,\epsilon,b}(x + \nu t)\, dxdy\, dt \leq C, \end{aligned} \tag{5.19}$$

  con $C = C(\epsilon; \nu; \delta; b; \|u_0\|_{s,2}; \|x^{l/2}u_0\|_{L^2_{x,y}})$.

Hemos trabajado los siguientes casos:

1. De (5.12) tenemos las afirmaciones $(j, (0, 0))$ con $j = 1,\ 2, \cdots, n$.
2. De (5.13) se logran las afirmaciones $(0, (0, 1))$ y $(0, (1, 0))$ simultaneamente.

3. De (5.17) se obtienen las afirmaciones $(1,(1,0)$ y $(1,(0,1)$ simultaneamente.

4. De (5.18) se deducen las afirmaciones $(0,(\alpha_1,\alpha_2))$ con $|\alpha|=2$.

5. Los anteriores items siguen siendo válidos para cuando $l+|\alpha|\leq 3$.

6. Si en (5.19) es cierto para $(l,\alpha)=(1,\alpha)$, tomando $\frac{\delta}{2}$ en vez de δ, tenemos que existe $\widehat{t}\in(\frac{\delta}{2},\delta)$ tal que:

$$\sum_{|\alpha|=n}\int_{\mathbb{R}^2}\left[(\partial_x\partial^\alpha u)^2+(\partial_y\partial^\alpha u)^2\right](x,y,\widehat{t})\chi'_{1,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\leq C.$$

Con lo que del Teorema (4.1), obtenemos:

$$\begin{aligned}&\sum_{|\alpha|=n+1}\sup_{[\delta,T]}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial^\alpha u)^2(x,y,t)\chi_{0,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\\&\quad+\sum_{|\alpha|=n+1}\int_\delta^T\int_{\mathbb{R}^2}\left[(\partial_x\partial^\alpha u)^2+(\partial_y\partial^\alpha u)^2\right]\chi'_{0,\epsilon,b}(x+\nu t)\,dxdy\,dt\\&\quad\leq C(\epsilon;\nu;T;\|u_0\|_{s,2};\|x_+^{n+1}(u_0)^2\|_{L^1_{x,y}}).\end{aligned}\tag{5.20}$$

Esto es si asumimos $(1,\alpha)$ con $|\alpha|=n$ obtenemos las afirmaciones $(0,(\alpha_1+1,\alpha_2))$ y $(0,(\alpha_1,\alpha_2+1))$.

El siguiente diagrama ilustra de manera detallada el método de la demostración del Teorema (5.1), donde los puntos azules indican las afirmaciones (l,α) y las flechas rojas son implicaciones.

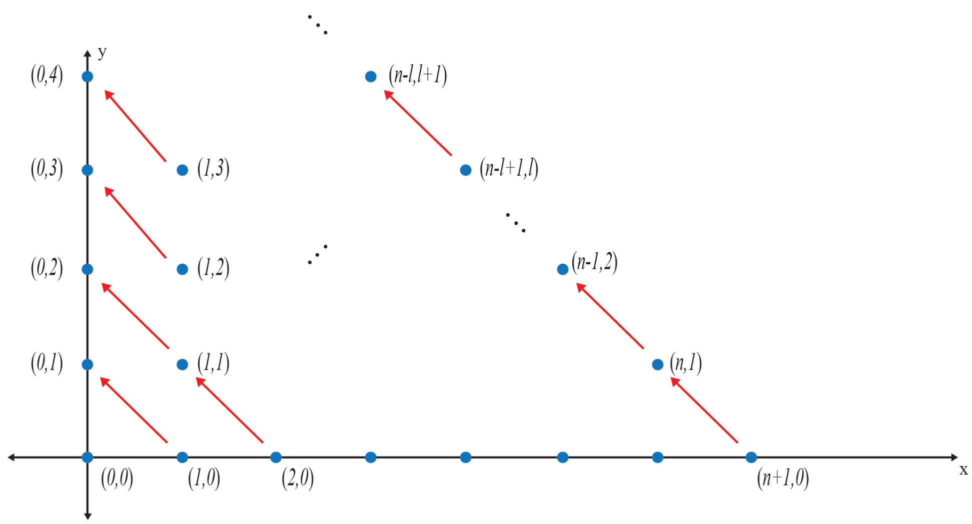


Figura 5.1: Método de demostración del Teorema (5.1).

Por tanto para completar la inducción asumimos (5.19) para (l,α) tal que:

$$\begin{cases}(l,|\alpha|)\leq(n-j,j) & \text{para todo } \ j=0,\cdots,n\\(l,|\alpha|)=(n+1,0),\cdots,(n+1-k,k) & \text{para algún } k\in\mathbb{Z}^+ \ \text{ con } \ k\leq n.\end{cases}$$

Consideramos el orden $\leq$ entre las parejas ordenadas como el orden lexicográfico entre la cantidad de derivadas y el peso en cuestión. Así necesitamos por tanto probar el caso $((n+1)-(l+1),(l+1)) = (n-l, l+1)$. Observamos que del item 6. tenemos que si $(1,l)$ implica el caso $(0, l+1)$ y este caso es en realidad $l = n$ es suficiente por tanto asumir que $l \leq n-1$.

Del anterior paso $(n-l+1, l)$, tenemos que para cualquier $\delta' > 0$, $\nu \geq 0$, $\epsilon > 0$ y $b \geq 5\epsilon$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\sup_{\delta' \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\alpha u)^2 \chi_{n+1-l,\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy + \\ &\quad + \int_{\delta'}^T \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{|\beta|=l+1} (\partial^\beta u)^2 \chi'_{n+1-l,\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt < \infty. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Puesto que:

$$\chi'_{n+1-l,\epsilon,b}(x) \geq c\, \chi_{n-l,\epsilon,b}(x),$$

se tiene que por (5.21) que existe $\widehat{t} \in (\delta', 2\delta')$ tal que:

$$\sum_{|\beta|=l+1} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\beta u)^2(x, \widehat{t}) \chi_{n-l,\epsilon,b}(x)\, dxdy \leq C, \qquad \text{con} \qquad (\nu = 0).$$

Pero de (5.7) para $t > \widehat{t}$, el principal objetivo es estudiar las cantidades $|A_i(t)|$ para $i = 1,2,3$ con $|\beta| = l+1$, teniendo presente $|\alpha| = l$.
De (5.21), despúes de aplicar integración en la variable temporal $t \in [\widehat{t}, T]$ para β e $i = 1,2$, se sigue:

$$\int_{\widehat{t}}^T |A_i(t)|\, dt \leq |\nu| \int_{\widehat{t}}^T \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\beta u)^2 \chi'_{n-l,\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt \leq C(\nu, \epsilon, b),$$

Procedemos ahora a estudiar $|A_3^\beta(t)|$, y seguiremos las mismas ideas que empleamos en el capítulo anterior, esto es, aplicar la regla de Leibniz para la derivada β y posteriormente estudiar los sumandos extremos de dicha expansión y aplicar la hipótesis de inducción para acotar los sumandos internos como se realizó en (4.67).

$$\begin{aligned} &\int_{\widehat{t}}^T |A_3^\beta(t)|\, dt \\ &= \int_{\widehat{t}}^T \left| \left(\sum_{\substack{0 \leq |\kappa| < 3;\ \gamma \\ (l+1)-2 \leq |\kappa| \leq l+1\ ;\gamma}} + \sum_{3 \leq |\kappa| < (l+1)-2;\ \gamma} \right) c_{\kappa,\gamma} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^\kappa u)(\partial_x \partial^\gamma u)(\partial^\beta u) \chi_{n-l,\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy \right| dt \\ &= \int_{\widehat{t}}^T |S^{n-l}_{1,\kappa,\gamma}(t) + S^{n-l}_{2,\kappa,\gamma}(t)|\, dt \end{aligned}$$

Notamos que

$$\int_{\widehat{t}}^T S^{n-l}_{1,\kappa,\gamma}(t)\, dt = \sum_{|\omega|<3} \int_{\widehat{t}}^T c_\omega A^{n-l}_\omega(t)\, dt,$$

donde $A_{\omega}^{n-l}(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\omega} u)(\partial^{\alpha-\omega} u)(\partial^{\beta} u)\chi_{n-l,\epsilon,b}(x+\nu t)\, dxdy\, dt$ con $|\omega| = 0,\ 1,\ 2$. Aplicando la desigualdad de Young, resta por estimar la cantidad:

$$\int_{\hat{t}}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\omega} u)^2 (\partial^{\alpha-\omega} u)^2 \chi_{n-l,\epsilon,b}\, dxdy\, dt. \tag{5.22}$$

Acerca de (5.22) tenemos los siguientes casos:

- Si $|\omega| = 0$, aplicamos la estimación (3.35) y el Lema de Sobolev, obtenemos una acotación más un término de Gronwall.
- Si $|\omega| = 1$, tenemos nuevamente presente (3.35), pues sólo aparecen términos de Gronwall, para este caso.
- Si $|\omega| = 2$, aplicando (5.22) obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{t}}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\omega} u)^2 (\partial^{\alpha-\omega} u)^2 \chi_{n-l,\epsilon,b}\, dxdy\, dt \\ &\quad \leq C \int_{\hat{t}}^{T} \|(\partial^{\omega} u)^2 \chi_{0,\frac{\epsilon}{5}}(\cdot, +\nu t)\|_{L^{\infty}_{x,y}} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\alpha-\omega} u)^2 \chi_{n-l}(x+\nu t)\, dxdy\, dt. \end{aligned} \tag{5.23}$$

  Puesto que $|\alpha - \omega| + n - l = n - 2 < n$, basta estudiar la cantidad

$$\int_{\hat{t}}^{T} \|(\partial^{\omega} u)^2 \chi_{0,\frac{\epsilon}{5}}(\cdot + \nu t)\|_{L^{\infty}_{x,y}}\, dt,$$

  la cual está acotada a partir de las afirmaciones $(l, |\alpha|) = (0,2),\ (0,3)$.

Ahora para estimar $\displaystyle\int_{\hat{t}}^{T} S_{2,\kappa,\gamma}(t)\, dt$ pero con la condición $3 \leq |\kappa| < l - 1$, resta por ver:

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{t}}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\kappa} u)^2 (\partial^{\gamma+(0,1)} u)^2 \chi_{n-l,\epsilon,b}\, dxdy\, dt \\ &\quad \leq \int_{\hat{t}}^{T} \|(\partial^{\kappa} u)^2 \chi_{0,\frac{\epsilon}{5}}(\cdot + \nu t)\|_{L^{\infty}_{x,y}} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\gamma+(1,0)} u)^2 \chi_{n-l}(t)\, dxdy\, dt. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Al ser $|\kappa| \leq l - 1 < n$, tenemos que $\|(\partial^{\kappa} u)^2 \chi_{0,\frac{\epsilon}{5}}(\cdot + \nu t)\|_{L^{\infty}_{x,y}} < \infty$. Por otro lado ya que

$$|\gamma| = l + 1 - |\kappa| \leq l - 2,$$

tenemos por tanto que $|\gamma| + 1 + n - l \leq n - 1$, con lo que

$$\int_{\hat{t}}^{T} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial^{\gamma+(1,0)} u)^2 \chi_{n-l}(t)\, dxdy\, dt < \infty.$$

Esto implica que

$$\int_{\hat{t}}^{T} S_{2,\kappa,\gamma}^{n-l}(t)\, dt < \infty \quad \text{para todo} \quad \kappa,\ \gamma \text{ condicionado anteriormente.}$$

Para justificar cada uno de los casos anteriormente tratados formalmente, se sigue un argumento de compacidad y el buen planteamiento en los espacios $\mathcal{F}_{\infty,(\infty,0)}(\mathbb{R}^2)$, (ver [3]), de forma análoga a como se realizó en el capítulo anterior, por lo cual omitimos los detalles de la prueba. □

6

Bibliografía

[1] A. V. Faminskii. *The Cauchy problem for the Zakharov-Kuznetsov equation. J. Differential Equations*, **31**: 1002–1012, 1995.

[2] L. Farah, F. Linares, and A. Pastor. *A note on the 2D generalized Zakharov–Kuznetsov equation: local, global, and scattering results. J. Differential Equation*, **253**: 2558–2571, 2012.

[3] G. Fonseca and M. Pachon. *Well-posedness for the two dimensional generalized Zakharov–Kuznetsov equation in anisotropic weighted Sobolev spaces. J. Math. Anal. Appl*, **443**: 566–584, 2016.

[4] A. Grunröck and S. Herr. *The Fourier restriction norm method for the Zakharov-Kuznetsov equation. Discrete Contin, Dyn. Syst.*, **34**: 2061–2068, 2014.

[5] R. Iório Jr and V. De Magalhães Iório. *Fourier analysis and partial differential equations*, volume **70**. Cambridge University Press, 2001.

[6] P. Isaza, F. Linares, and G. Ponce. *On the propagation of regularity and decay of solutoins to the k-generalized Korteweg-de vries equation. Comm. Partial Diff. Eqs.*, **40**: 1336–1364, 2015.

[7] P. Isaza, F. Linares, and G. Ponce. *On the propagation of regularities in solutions of the Benjamin-Ono equation. J. Funct. Anal.*, **270**: 976–1000, 2016.

[8] P. Isaza, F. Linares, and G. Ponce. *On the propagation of regularity of solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation. SIAM J. Math. Anal.*, **48**: 1006–1024, 2016.

[9] T. Kato. *On the Cauchy Problem for the (Generalized) Kortewed-de Vries Equation. Studies in Applied Mathematics advances in mathematics supplementary studies.*, **8**: 93–128, 1982.

[10] T. Kato and G. Ponce. *Commutator estimates and the euler and navier-stokes equations. Communications on Pure and Applied Mathematics*, **41**: 891–907.

[11] T. Katutani and H. Ono. *Weak nonlinear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma. J. Phys. Soc. Japan*, **26**: 1305–1318, 1965.

[12] C. Kenig, F. Linares, G. Ponce, and L. Vega. *On the regularity of solutions to the k-generalized Korteweg-de Vries equation. arXiv preprint arXiv:1606.03715*, 2016.

[13] C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *Well-posedness of the Initial Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation. J. Amer. Math. Soc.*, **4**: 323–347, 1991.

[14] C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *Well-posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle. Comm. Pure Appl. Anal.*, **31**: 527–620, 1993.

[15] D. Korteweg and G. de Vries. *On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves. Philosophical Magazine*, 5th series **36**, 1895.

[16] D. Lannes, F. Linares, and J. Saut. *The Cauchy problem for the Euler-Poisson equation and derivation of the Zakharov-Kuznetsov equation in Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Eds. M. Cicognani, FL Colombini and D. Del Santo*, pages 181–213, 2013.

[17] F. Linares and A. Pastor. *Well-Posedness for the Two-Dimensional Modified Zakharov–Kuznetsov Equation. SIAM J. Math. Anal.*

[18] F. Linares and A. Pastor. *Local and global well posedness for two dimensional generalized Zakharov Kuznetzov equation. J. Funct. Anal.*, **260**(4): 1060–1085, 2011.

[19] F. Linares. and G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Springer, New York, 2009.

[20] F. Linares, G. Ponce, and T. Sideris. *Properties of solutions to the Camassa-Holm equation on the line in a class containing the peakons. arXiv preprint arXiv:1609.06212*, 2016.

[21] F. Linares, G. Ponce, and D. Smith. *On the regularity of solutions to a class of nonlinear dispersive equations. To appear in Mathematische Annalen*, 2016.

[22] R. Miura. *Kortewed-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation. J. Math. Phys*, **2**: 1202–1204, 1968.

[23] R. Miura. *The Kortewed-de Vries equation: a survey of results. SIAM J. Math. Anal*, **18**: 412–459, 1976.

[24] R. Miura., C. Gardner, and M. Kruskal. *Kortewed-de Vries equation and generalizations II. Existence of conservation laws and constants of motion. J. Math. Phys.*, **9**: 1204–1209, 1968.

[25] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. vol. 1. Functional analysis.* Academic, 1980.

[26] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill New York,**3**, 1964.

[27] J. Segata and D. Smith. *Propagation of regularity and persistence of decay for fifth order dispersive models. J. Dyn. Diff. Equat.*, **2**: 1–36, 2015.

[28] E. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions Princeton Math. Series, vol*, **30**, 1970.

[29] T. W. Ting. *Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations. JMSJ J. Math. Soc. Jpn*, **21**: 440–453, 1969.

[30] S. Vento and F. Ribaud. *A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equations. C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **350**: 499–503, 2011.

[31] V. Zakharov and E. Kuznetsov. *On three dimensional solitons. Sov. Phys.*, **66**: 594–597, 1974.